



5. cvičení – Řada a integrál

<https://www2.karlin.mff.cuni.cz/~kuncova/vyuka.php>, kuncova@karlin.mff.cuni.cz

Příklady

1. Rozviňte do řady

$$(a) \int_0^1 \frac{\ln(1+x)}{x} dx = \frac{\pi^2}{12}$$

Řešení:

- Rozvoj: Z Taylorova rozvoje máme pro $x \in (-1, 1]$

$$\log(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n}$$

Tedy

$$f(x) = \frac{\log(1+x)}{x} = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^{n-1}}{n}$$

Počítáme tedy integrál

$$\int_0^1 \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^{n-1}}{n} dx$$

- Lebesgueova věta: Ověřujeme

$$\sum_{n=1}^{\infty} \int_0^1 \left| (-1)^{n+1} \frac{x^{n-1}}{n} \right| dx = \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^1 \left| \frac{x^{n-1}}{n} \right| dx = \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{x^n}{n^2} \right]_0^1 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} < \infty.$$

- Prohození a výpočet:

$$\begin{aligned} \int_0^1 \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^{n-1}}{n} dx &= \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^1 (-1)^{n+1} \frac{x^{n-1}}{n} dx = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \int_0^1 \frac{x^{n-1}}{n} dx \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \left[\frac{x^n}{n^2} \right]_0^1 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2} = \frac{\pi^2}{12} \end{aligned}$$

$$(b) \int_0^1 \frac{\ln(1-x)}{x} dx = -\frac{\pi^2}{6}$$

Řešení:

- Rozvoj: Z Taylorova rozvoje máme pro $x \in (-1, 1]$

$$\log(1-x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{(-x)^n}{n} = \sum_{n=1}^{\infty} -\frac{x^n}{n}$$

Tedy

$$f(x) = \frac{\log(1-x)}{x} = \sum_{n=1}^{\infty} -\frac{x^{n-1}}{n}$$

Počítáme tedy integrál

$$\int_0^1 \sum_{n=1}^{\infty} -\frac{x^{n-1}}{n} dx = -\int_0^1 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n-1}}{n} dx$$

- Věta: Levi: funkce $f_n(x) = \frac{x^{n-1}}{n}$ jsou nezáporné a měřitelné (protože spojitě).
- Prohození a výpočet:

$$-\int_0^1 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n-1}}{n} dx = -\sum_{n=1}^{\infty} \int_0^1 \frac{x^{n-1}}{n} dx = -\sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{x^n}{n^2} \right]_0^1 = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = -\frac{\pi^2}{6}$$

(c) $\int_0^{\infty} \frac{x}{e^x + 1} dx$

Řešení:

- Rozvoj: Nejprve upravíme, pak rozvineme jako geometrickou řadu ($e^{-x} < 1$ na $(0, \infty)$)

$$\frac{x}{e^x + 1} = \frac{x}{e^x(1 + e^{-x})} = \frac{x}{e^x} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n e^{-xn} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x e^{-(n+1)x}$$

Počítáme tedy integrál

$$\int_0^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x e^{-(n+1)x} dx$$

- Lebesgueova věta: Ověřujeme

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^{\infty} |(-1)^n x e^{-(n+1)x}| dx &= \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^{\infty} x e^{-(n+1)x} dx \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \left[\frac{x e^{-(n+1)x}}{-(n+1)} \right]_0^{\infty} - \int_0^{\infty} \frac{e^{-(n+1)x}}{-(n+1)} dx \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \left[\frac{x e^{-(n+1)x}}{-(n+1)} \right]_0^{\infty} + \left[\frac{e^{-(n+1)x}}{-(n+1)^2} \right]_0^{\infty} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \left(0 + \frac{1}{(n+1)^2} \right) < \infty \end{aligned}$$

- Prohození a výpočet:

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x e^{-(n+1)x} dx &= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \int_0^{\infty} x e^{-(n+1)x} dx \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{(n+1)^2} = \frac{\pi^2}{12} \end{aligned}$$

(d) $\int_0^{\infty} \frac{x}{e^x - 1} dx$

Řešení:

- Rozvoj: Nejprve upravíme, pak rozvineme jako geometrickou řadu ($e^{-x} < 1$ na $(0, \infty)$)

$$\frac{x}{e^x - 1} = \frac{x}{e^x(1 - e^{-x})} = \frac{x}{e^x} \sum_{n=0}^{\infty} e^{-xn} = \sum_{n=0}^{\infty} x e^{-(n+1)x}$$

Počítáme tedy integrál

$$\int_0^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} x e^{-(n+1)x} dx$$

- Věta: Levi: funkce $f_n(x) = x e^{-(n+1)x}$ jsou nezáporné a měřitelné (protože spojitě).
- Prohození a výpočet:

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} x e^{-(n+1)x} dx &= \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^{\infty} x e^{-(n+1)x} dx \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+1)^2} = \frac{\pi^2}{6} \end{aligned}$$

(e) $\int_0^1 \ln \frac{1}{1-x} dx$

Řešení:

- Rozvoj: Ze vzorce a z Taylorova rozvoje máme pro $x \in (-1, 1]$

$$\log \frac{1}{1-x} = -\log(1-x) = -\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{(-x)^n}{n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$$

Počítáme tedy integrál

$$\int_0^1 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n} dx$$

- Věta: Levi: funkce $f_n(x) = \frac{x^n}{n}$ jsou nezáporné a měřitelné (protože spojitě).
- Prohození a výpočet:

$$\int_0^1 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n} dx = \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^1 \frac{x^n}{n} dx = \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{x^{n+1}}{n(n+1)} \right]_0^1 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = 1$$

(f) $\int_0^1 \ln \frac{1+x}{1-x} dx = 2 \ln 2$

Řešení:

- Rozvoj - prve odvodíme Taylorův rozvoj. Pro $x \in (0, 1)$ máme

$$\begin{aligned} \log \frac{1+x}{1-x} &= \log(1+x) - \log(1-x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n} - \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{(-x)^n}{n} \\ &= 2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{2n+1} \end{aligned}$$

Počítáme tedy integrál

$$\int_0^1 \sum_{n=0}^{\infty} 2 \frac{x^{2n+1}}{2n+1} dx$$

- Věta: Levi: funkce $f_n(x) = 2 \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$ jsou nezáporné a měřitelné (protože spojitě).
- Prohození a výpočet:

$$\begin{aligned} \int_0^1 \sum_{n=0}^{\infty} 2 \frac{x^{2n+1}}{2n+1} dx &= \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^1 2 \frac{x^{2n+1}}{2n+1} dx = \sum_{n=0}^{\infty} \left[2 \frac{x^{2n+2}}{(2n+1)(2n+2)} \right]_0^1 \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2}{(2n+1)(2n+2)} = 2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2n+1} - \frac{1}{(2n+2)} \\ &= 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} = 2 \log 2 \end{aligned}$$

$$(g) \int_0^1 \frac{1}{x} \ln \frac{1+x}{1-x} dx = \frac{\pi^2}{4}$$

Řešení:

- Rozvoj - z předchozího příkladu plyne

$$\frac{1}{x} \log \frac{1+x}{1-x} = 2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{2n+1}$$

Počítáme tedy integrál

$$\int_0^1 \sum_{n=0}^{\infty} 2 \frac{x^{2n}}{2n+1} dx =$$

- Věta: Levi: funkce $f_n(x) = 2 \frac{x^{2n}}{2n+1}$ jsou nezáporné a měřitelné (protože spojitě).
- Prohození a výpočet:

$$\begin{aligned} \int_0^1 \sum_{n=0}^{\infty} 2 \frac{x^{2n}}{2n+1} dx &= \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^1 2 \frac{x^{2n}}{2n+1} dx = \sum_{n=0}^{\infty} \left[2 \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)^2} \right]_0^1 \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2}{(2n+1)^2} = \frac{\pi^2}{4} \end{aligned}$$

$$(h) \int_0^{\infty} e^{-x} \cos \sqrt{x} dx = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{n!}{(2n)!}$$

Řešení:

- Rozvoj: Z Taylorova rozvoje máme pro $y \in \mathbb{R}$

$$\cos y = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{y^{2n}}{(2n)!}$$

Položme $y = \sqrt{x}$ pro $x \in (0, \infty)$. Dostáváme

$$f(x) = e^{-x} \cos \sqrt{x} = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-x} (-1)^n \frac{x^n}{(2n)!}$$

Počítáme tedy integrál

$$\int_0^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} e^{-x} (-1)^n \frac{x^n}{(2n)!} dx$$

- Lebesgueova věta: Ověřujeme

$$\sum_{n=0}^{\infty} \int_0^{\infty} \left| e^{-x} (-1)^n \frac{x^n}{(2n)!} \right| = \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^{\infty} e^{-x} \frac{x^n}{(2n)!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n)!} \int_0^{\infty} e^{-x} x^n$$

Pomocí per partes lze odvodit $\int_0^{\infty} e^{-x} x^n dx = n!$. Pak

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n)!} \int_0^{\infty} e^{-x} x^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n!}{(2n)!}$$

Tato řada ale konverguje z d'Alambertova podílového kritéria:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{(n+1)!}{(2n+2)!}}{\frac{n!}{(2n)!}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)}{(2n+2)(2n+1)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2(2n+1)} = 0 < 1,$$

tedy řada konverguje.

- Prohození a výpočet:

$$\int_0^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} e^{-x} (-1)^n \frac{x^n}{(2n)!} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \int_0^{\infty} e^{-x} \frac{x^n}{(2n)!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n n!}{(2n)!}$$

$$(i) \int_0^1 \frac{x^{p-1}}{1+x^q} dx = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{p+nq}, \quad p, q > 0$$

Řešení:

- Rozvoj: Z Taylorova rozvoje máme pro $x \in (-1, 1)$

$$\frac{x^{p-1}}{1+x^q} = x^{p-1} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{qn} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{p-1+qn}$$

Tedy

$$f(x) = \frac{\log(1+x)}{x} = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^{n-1}}{n}$$

Počítáme tedy integrál

$$\int_0^1 \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{p-1+qn} dx$$

- Uvažujme posloupnost částečných součtů

$$g_j(x) = \sum_{n=0}^j (-1)^n x^{p-1+qn}$$

podle vzorce pro částečný součet geometrické řady máme

$$g_j = x^{p-1} \frac{1 - (-x^q)^{j+1}}{1 + x^q}$$

Hledáme majorantu

$$|g_j| = \left| x^{p-1} \frac{1 - (-x^q)^{j+1}}{1 + x^q} \right| \leq \left| x^{p-1} \frac{2}{1 + x^q} \right|$$

Ale funkce $g(x) = \frac{2x^{p-1}}{1+x^q} \in L^1(0, 1)$. (U 0 srovnáme s x^{p-1} .)

- Tedy jsme našli konvergentní majorantu a můžeme prohodit limitu posloupnosti a integrál. (Třetí rovnost plyne z linearit integrálu - jde o konečný součet.)

$$\begin{aligned} \int_0^1 \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{p-1+qn} dx &= \int_0^1 \lim_{j \rightarrow \infty} \sum_{n=0}^j (-1)^n x^{p-1+qn} dx \\ &= \lim_{j \rightarrow \infty} \int_0^1 \sum_{n=0}^j (-1)^n x^{p-1+qn} dx \\ &= \lim_{j \rightarrow \infty} \sum_{n=0}^j \int_0^1 (-1)^n x^{p-1+qn} dx \\ &= \lim_{j \rightarrow \infty} \sum_{n=0}^j (-1)^n \int_0^1 x^{p-1+qn} dx \\ &= \lim_{j \rightarrow \infty} \sum_{n=0}^j (-1)^n \left[\frac{x^{p+nq}}{p+nq} \right]_0^1 \\ &= \lim_{j \rightarrow \infty} \sum_{n=0}^j \frac{(-1)^n}{p+nq} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{p+nq} \end{aligned}$$

2. Sečtěte $\sum_{n=1}^{\infty} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - \sqrt{\sin x})^n \cos x dx$.

Řešení: Příklad i s řešením převzat odtud: <https://people.cas.uab.edu/~mosya/teaching/Problems>

Protože $f_n = (1 - \sqrt{\sin x})^n \cos x$ jsou pro $x \in (0, \frac{\pi}{2})$ nezáporné měřitelné funkce, můžeme

prohodit z Leviho věty. Tedy počítáme

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - \sqrt{\sin x})^n \cos x \, dx &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sum_{n=1}^{\infty} (1 - \sqrt{\sin x})^n \cos x \, dx \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x \sum_{n=1}^{\infty} (1 - \sqrt{\sin x})^n \, dx\end{aligned}$$

Upravíme jako geometrickou řadu

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x \sum_{n=1}^{\infty} (1 - \sqrt{\sin x})^n \, dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{\sqrt{\sin x}} \, dx$$

Vyřešíme substitucí $y = \sin x$, $dy = \cos x \, dx$:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{\sqrt{\sin x}} \, dx = \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{y}} \, dy = [2\sqrt{y}]_0^1 = 2.$$