1

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^\infty e^{-nx^2}\, dx$$

fix $x \in (0,\infty)$ $\qquad f_n = e^{-nx^2}$. $\qquad$ spoj. $\to$ měř

$$\lim_{n\to\infty} e^{-nx^2} = 0 \qquad \text{taky spoj}$$

$$\int_0^\infty 0\, dx = 0$$

Pro $x \in (0,\infty)$

$$e^{-nx^2} \le e^{-x^2} \qquad -nx^2 \le -x^2$$

$$x^2 \le nx^2$$

$g = e^{-x^2}$ majoranta $\to$ není v tabulce, ale ukázali jsme ve 2. cvičení

Tedy z Leb. lze prohodit

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^\infty \underbrace{\frac{e^{-nx}}{1+x^2}}_{f_n} \, dx = 0$$

$f_n$ spoj. → měř.

fix $x$: $\lim_{n\to\infty} \frac{e^{-nx}}{1+x^2} = 0$

$$\frac{e^{-nx}}{1+x^2} \le \frac{1}{1+x^2} =: g(x)$$ integr. majoranta (víme z minulých cvičení)

Tedy z Lebesguea

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^\infty \frac{e^{-nx}}{1+x^2} \, dx = \int_0^\infty 0 = 0$$

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 \underbrace{\frac{n \sin x}{1 + n^2 \sqrt{x}}}_{f_n} \, dx = 0$$

$f_n$ spoj $\to$ měř, 0 spoj $\to$ měř

fix $x \in (0,1)$: $\quad \displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{n \sin x}{1+n^2\sqrt{x}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \frac{\sin x}{\frac{1}{n^2} + \sqrt{x}} = 0$

Lebesgue

$$\left| \frac{n \sin x}{1+n^2\sqrt{x}} \right| \leq \frac{n}{1+n^2\sqrt{x}} \leq \frac{n}{n^2\sqrt{x}} = \frac{1}{n\sqrt{x}} \leq \frac{1}{\sqrt{x}} \quad \text{majoranta}$$

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 \underbrace{n\sqrt{x}\, e^{-n^2x^2}}_{f_n} \, dx = 0$$

$f_n$ spoj., 0 spoj. $\Rightarrow$ měř.

pro $x \in (0,1)$: $\lim_{n\to\infty} f_n = 0$

(ze škály)

fix $x \in (0,1)$; zavedeme $h_x(n) = n\sqrt{x}\, e^{-n^2x^2}$ $n \in [1,\infty)$

$$h_x'(n) = \sqrt{x}\, e^{-n^2x^2} + n\sqrt{x}\, e^{-n^2x^2}(-2nx^2) = 0$$

$$\sqrt{x}\, e^{-n^2x^2}(1 - 2n^2x^2) = 0$$

$$\frac{1}{2x^2} = n_0^2$$

$$\frac{1}{\sqrt{2}\, x} = n_0$$

pak $h_x(n_0) = e^{-1/2} \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{x}}$

majoranta: $g(x) = \max\left\{ \sqrt{x}\, e^{-x^2} ; \frac{1}{\sqrt{2e}} \cdot \frac{1}{\sqrt{x}} ; 0 \right\}$

$\sqrt{x}\, e^{-x^2}$ $\downarrow$ integrov.

$\frac{1}{\sqrt{2e}} \cdot \frac{1}{\sqrt{x}}$ $\downarrow$ integrov.

max 2 integrovatelných = integrovatelná

Z Lebesguea lze prohodit

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^\infty \frac{dx}{(1+\frac{x}{n})^n \sqrt[n]{x}}$$

1/ $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = e^{-x}$ , $\int_0^\infty e^{-x}\,dx = 1$ .

2/ Ukažte, že platí:

$$n \in N\ ;\ x \in (0,1) \Rightarrow \frac{1}{(1+\frac{x}{n})^n \cdot \sqrt[n]{x}} \le \frac{1}{\sqrt[n]{x}} \le \frac{1}{\sqrt{x}} ,$$

$$n \ge 2 ,\ x \in (1,+\infty) \Rightarrow \frac{1}{(1+\frac{x}{n})^n \cdot \sqrt[n]{x}} \le (1+\frac{x}{n})^{-n} =$$

$$= \left[ \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} \cdot \left(\frac{x}{n}\right)^j \right]^{-1} \le \left[ \frac{1}{2}\, n\,(n-1)\, \frac{x^2}{n^2} \right]^{-1} \le \frac{4}{x^2} .$$

Položíme-li tedy $g(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$ pro $x \in (0,1)$ , $g(x) = \frac{4}{x^2}$ pro $x \in (1,+\infty)$ , jest $g \in \mathcal{L}_{(0,+\infty)}$ (odůvodněte ! ) a můžeme použít Lebesgueovu větu .

**4,8.** Dokažte, že $\lim_{n\to\infty} \int_0^\infty \frac{\log(x+n)}{n}\, e^{-x} \cos x\,dx = 0$ !

1/ Limitní funkce je rovna nule na $(0,+\infty)$.

2/ Použijte Lebesgueovu větu a využijte vztahů:

a/ $n \in N$ , $x \in (0,+\infty) \Rightarrow \frac{\log(x+n)}{n} < \frac{x+n}{n} \le 1 + x$

b/ $e^{-x}(1+x) \in \mathcal{L}_{(0,+\infty)}$ .

**4,9.** Buď $0 < A < +\infty$ , potom $\lim_{n\to\infty} \int_0^A \frac{e^{x^3}}{1+nx}\,dx = 0$ .

Použijte Lebesgueovu i Leviho větu, využijte vztahu

$$x \in (0,A) ,\ n \in N \Rightarrow \frac{e^{x^3}}{1+nx} \le e^{x^3} \in \mathcal{L}_{(0,A)} .$$

Ne vždy je pravda, že

$$f_n \longrightarrow f \quad \text{na } M \Rightarrow \int_M f_n \longrightarrow \int_M f$$

Uveďme příklady

**4,10.** Definujme pro každé $n \in N$ funkci $f_n$ na $\langle 0,1\rangle$ takto:

$f_n(x) = n \sin(\pi n x)$ pro $x \in \langle 0, \frac{1}{n})$ ,

$f_n(x) = 0$ pro $x \in \langle \frac{1}{n}, 1\rangle$.

Potom a/ $f_n \longrightarrow 0$ v $\langle 0,1\rangle$,

b/ $\int_0^1 f_n = \frac{2}{\pi}$ , $\int_0^1 \lim_{n\to\infty} f_n = 0$ .

Může být $f_n \rightrightarrows 0$ v $\langle 0,1\rangle$ ?

**Problem 2.** If $f \in L^1(\mathbb{R})$, prove that

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{2n} \int_{-n}^{n} f\,dx = 0.$$

Give an example to show that this result need not be true if $f$ is not integrable on $\mathbb{R}$.

**Solution.**

- Let

$$f_n = \frac{1}{2n}\chi_{[-n,n]}f,$$

where $\chi_{[-n,n]}$ is the characteristic function of the interval $[-n,n]$. Then

$$\int f_n\,dx = \frac{1}{2n}\int_{-n}^{n} f\,dx.$$

- We have $f_n(x) \to 0$ as $n \to \infty$ whenever $f(x) \neq \pm\infty$, so $f_n \to 0$ pointwise a.e. on $\mathbb{R}$. Also, for $n \geq 1$,

$$|f_n| \leq \frac{1}{2}|f| \in L^1(\mathbb{R}).$$

- The Lebesgue dominated convergence theorem implies that

$$\lim_{n\to\infty} \int f_n\,dx = \int \lim_{n\to\infty} f_n\,dx = \int 0\,dx = 0,$$

which proves the result

- If $f = 1$, then

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{2n}\int_{-n}^{n} f\,dx = 1.$$

In this case the sequence

$$f_n = \frac{1}{2n}\chi_{[-n,n]}$$

converges pointwise (and even uniformly) to 0 on $\mathbb{R}$ as $n \to \infty$, but the integrals do not. Note that the convergence is not monotone and the sequence $(f_n)$ is not dominated by any integrable function.

Příklad od H. Malého

Jako příklad na rozmyšlenou: Máme posloupnost nezáporných integrovatelných funkcí a lze zaměnit limitu a integrál, existuje integrovatelná majoranta?

Protipříklad je třeba toto:

Nechť $f_n(x) = \frac{1}{n \log n} e^{-\frac{x}{n}}\, dx$. Potom $f_n \to 0$ a $\int_0^\infty f_n = \frac{1}{\log n} \to 0$. Nechť $g$ je majoranta. Potom

$$\int_n^{n+1} g(x)\, dx \geq \int_n^{n+1} f_n(x)\, dx = \frac{1}{\log n} \int_1^{1+\frac{1}{n}} e^{-t}\, dt \geq \frac{c}{n \log n},$$

tedy

$$\int_0^\infty g(x)\, dx \geq c \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n \log n} = \infty.$$

$t = \frac{x}{n}$

$dt = \frac{1}{n}\, dx$

| $x$ | $n$ | $n+1$ |
|---|---|---|
| $t$ | $1$ | $1+\frac{1}{n}$ |

$$\left[-e^{-t}\right]_1^{1+\frac{1}{n}} = -e^{-(1+\frac{1}{n})} + e^{-1} = e^{-1}\left(1 - e^{-1/n}\right)$$

$$= -e^{-1}\left(e^{-1/n} - 1\right)$$

$$\geq -e^{-1} \cdot \left(-1/n\right)$$

$$= \frac{e^{-1}}{n} = \frac{c}{n}$$

$e^{x} - 1 \geq x \quad (\forall x)$