

4. cvičení – Limita posloupnosti a integrál

<https://www2.karlin.mff.cuni.cz/~kuncova/vyuka.php>, kuncova@karlin.mff.cuni.cz

1 Limita posloupnosti a integrál

Teorie

Věta 1 (Levi). Necht $\{f_n\}$ je posloupnost měřitelných funkcí na D , $0 \leq f_1 \leq f_2 \leq \dots$ a $f = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n$. Pak

$$\int_D f \, d\mu = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_D f_n \, d\mu.$$

Věta 2 (Lebesgue). Necht f a $\{f_n\}$ jsou měřitelné funkce na D , Necht posloupnost $\{f_n\}$ konverguje skoro všude k f . Necht existuje funkce $g \in L^1(D)$ (majoranta) tak, že

$$|f_n(x)| \leq |g(x)|, \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad \forall x \in D.$$

Potom

$$\int_D f \, d\mu = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_D f_n \, d\mu.$$

Algoritmus

1. **Zafixujeme** $x \in (a, b)$ a spočteme $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n$.
2. Jsou funkce **nezáporné** a posloupnost je **neklesající** - pro pevné x roste v n ? Levi.
3. Lze najít **majorantu**? Lebesgue.
 - (a) Lze použít nějakou **základní nerovnost**? $x \leq 1$ pro $x \in [0, 1]$, $|\sin x| \leq 1$, $|\sin x| \leq x$ pro $x \geq 0$, $\ln x \leq x - 1$, $e^{-x} < 1$ pro $x > 0$, $(a \pm b)^2 \geq 0$? Nelze zmenšit jmenovatele, vzít jen 1 člen součtu?
 - (b) Když nevíš, tak **derivuj**: funkci $g_x(n)$, $n \in [1, \infty)$, podle n . Maximum je pak v n_0 - bodu s nulovou derivací nebo v krajních bodech (tedy $n_0 = 1$ nebo v $\lim_{n \rightarrow \infty}$).
 - (c) Nenašla by se majoranta **alespoň** pro $n \geq 2$?
4. **Prohodíme** limitu a integrál.

Příklady

1. Spočtete

$$(a) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^\infty e^{-nx^2} \, dx$$

$$(b) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^\infty \frac{e^{-nx}}{1+x^2} \, dx$$

$$(c) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 \frac{n \sin x}{1+n^2 \sqrt{x}} \, dx$$

$$(d) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 n \sqrt{x} e^{-n^2 x^2} \, dx$$

$$(e) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^\infty \frac{dx}{(1 + \frac{x}{n})^n \cdot \sqrt[n]{x}}$$

2. Necht $f \in L^1(\mathbb{R})$ (tedy $\int_{-\infty}^\infty f < \infty$). Ukažte, že pak $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2n} \int_{-n}^n f(x) \, dx = 0$.

3. Necht f_n je posloupnost nezáporných integrovatelných funkcí, u které lze zaměnit limitu a integrál. Je pak pravda, že existuje integrovatelná majoranta?

• (1e) K majorantě by pomohl binomický rozvoj.
• $u/x \cdot e^{\frac{u \log u}{1}} = u f'(x)$

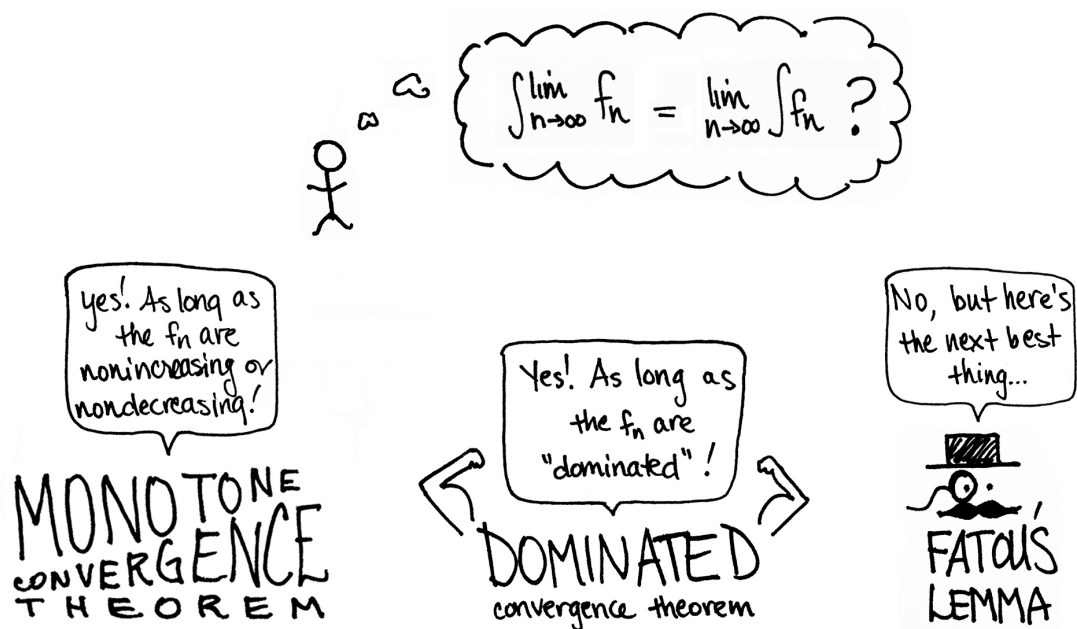


Figure 1: <https://www.math3ma.com/blog/dominated-convergence-theorem>