# 3. cvičení – Míra + Limita posloupnosti a integrál

https://www2.karlin.mff.cuni.cz/~kuncova/vyuka.php, kuncova@karlin.mff.cuni.cz

## 1 Míra a Lebesgueův integrál

Část úloh pochází z anglické sbírky https://people.cas.uab.edu/~mosya/teaching/Problems.

**Definice 1.** Nechť $\mathcal{A} \subset \exp(X)$. Systém množin $\mathcal{A}$ se nazývá *$\sigma$-algebra*, pokud

1. $X \in \mathcal{A}$,
2. $A \in \mathcal{A} \Rightarrow X \setminus A \in \mathcal{A}$,
3. $A_k \in \mathcal{A}, k \in \mathbb{N}, \Rightarrow \bigcup_k A_k \in \mathcal{A}$.

**Úloha 2.** Určete, zda jde o $\sigma$-algebru v prostoru $X$.

1. $\{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{a,b\}, \{b,c,d\}, \{a,c,d\}, \{c,d\}, \{a,b,c,d\}, \}$, kde $X = \{a,b,c,d\}$.

   **Řešení:** Ano. Patří tam celý prostor, všechny doplňky i všechna sjednocení.

2. $\{\emptyset, X, A, A^c\}$

   **Řešení:** Ano.

3. $\{A \subset X : A \text{ nebo } A^c \text{ je konečná}\}$

   **Řešení:** Jestliže má $X$ nekonečné množství prvků, tak nejde o $\sigma$-algebru, protože systém není uzavřený na spočetná sjednocení. Např. pro $X = \mathbb{N}$ do $\mathcal{A}$ patří každé liché číslo $\{2k+1\}$, ale jejich spočetné sjednocení už ne.

   Pro konečné $X$ jde o $\sigma$-algebru, protože obsahuje všechny podmnožiny.

4. $\{A \subset X : A \text{ nebo } A^c \text{ je spočetná}\}$

   **Řešení:** Ano.

5. $\{(-\infty, a], (a,b], (b,\infty), \emptyset, \mathbb{R}\}$

   **Řešení:** Ne. Uvažujme $A_n = (0, 1 - \frac{1}{n}] \in \mathcal{A}$. Pak $\bigcup_n A_n = (0,1) \notin \mathcal{A}$.

**Poznámka 3.** *Borelovskou $\sigma$-algebrou* rozumíme nejmenší $\sigma$-algebru obsahující otevřené množiny.

**Úloha 4.** Ověřte, že následující množiny patří do borelovské $\sigma$-algebry na $\mathbb{R}$. (Vyjádřete je pomocí doplňků a sjednocení otevřených množin. A doplňků a sjednocení takto vzniklých množin a doplňků a…)

1. $[0,1]$

   **Řešení:** $[0,1] = ((-\infty,0) \cup (1,\infty))^c$

2. $[0,1)$

   **Řešení:** $[1,\infty) = (-\infty,1)^c$.

   Pak $[0,1) = ((-\infty,0) \cup [1,\infty))^c$

3. $(0,1]$

   **Řešení:** $(-\infty,0]=(0,\infty)^c$.

   Pak $(0,1]=((-\infty,0]\cup(1,\infty))^c$

4. $\mathbb{N}$

   **Řešení:** $\{n\}=((-\infty,n)\cup(n,\infty))^c$ pro $n\in\mathbb{N}$.

   Pak $\mathbb{N}=\bigcup_n\{n\}$.

5. $\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$

   **Řešení:** $\{q\}=((-\infty,q)\cup(q,\infty))^c$, $q\in\mathbb{Q}$.

   Pak $\mathbb{Q}=\bigcup_{\mathbb{Q}}\{q\}$. Nakonec $\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}=(\mathbb{Q})^c$

6. $\mathbb{Q}_+$

   **Řešení:**

   $\mathbb{Q}_+=\bigcup_{Q_+}\{q\}$

7. uzavřené množiny

   **Řešení:** Z definice jsou doplňkem otevřených.

**Definice 5.** Nechť $(X,\mathcal{A})$ je měřitelný prostor. Množinová funkce $\mu:\mathcal{A}\to[0,\infty]$ se nazývá *míra*, pokud není identicky rovna $\infty$ a je $\sigma$-aditivní, tedy

$$A_k\in\mathcal{A}, k\in\mathbb{N}, \text{ jsou po dvou disjunktní, pak } \mu\left(\bigcup_{k=1}^{\infty}A_k\right)=\sum_{k=1}^{\infty}\mu(A_k).$$

**Poznámka 6.** Pro *Lebesgueovu míru* $\mathcal{L}$ platí, že intervaly jsou měřitelné množiny a že zachovává jejich délku, tedy $\mathcal{L}((a,b))=b-a$ (pro uzavřené, polouzavřené, polootevřené a degenerované intervaly to platí také). Někdy značíme také $\lambda((a,b))$ nebo $|(a,b)|$.

**Úloha 7.** Určete $\mathcal{L}$ míru množiny

1. $\mathcal{L}([0,1])=1$
2. $\mathcal{L}((0,1))=1$
3. $\mathcal{L}([2,6))=4$
4. $\mathcal{L}([0,\infty))=\infty$
5. $\mathcal{L}(\{-\pi\})=0$
6. $\mathcal{L}(\mathbb{Q})=0$
7. přímka v $\mathbb{R}^2$: $\mathcal{L}=0$
8. $\mathcal{L}(\mathbb{Q}\times(\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}))=0$: jde o spočetné sjednocení přímek, které jsou složeny jen z $\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$.
9. krychle $\mathcal{L}([0,2]\times[0,2]\times[0,2])=2\cdot2\cdot2=8$

**Poznámka 8.** (Podle https://www.physics.muni.cz/~tomtyc/teorfyzzaj/fraktaly_chaos-MSarbort.pdf.)

*Cantorovým diskontinuem* rozumíme množinu vzniklou následujícím postupem:

1. Označme $C_0 = [0,1]$.
2. Z této množiny „vyndáme prostřední třetinu" - interval $(\frac{1}{3}, \frac{2}{3})$. Zbylou množinu označme $C_1$, tedy $C_1 = [0, \frac{1}{3}] \cup [\frac{2}{3}, 1]$.
3. Z intervalů množiny $C_1$ opět vyjmeme prostřední třetiny. Získáme množinu $C_2 = [0, \frac{1}{9}] \cup [\frac{2}{9}, \frac{1}{3}] \cup [\frac{2}{3}, \frac{7}{9}] \cup [\frac{8}{9}, 1]$.
4. Postup iterujeme, vyndaváme další třetiny a definujeme množiny $C_n$.
5. Cantorovo diskontinuum je pak definováno jako $CD = \bigcap_n C_n$.

https://cs.wikipedia.org/wiki/Cantorovo_diskontinuum

**Úloha 9.** Určete míru Cantorova diskontinua.

**Řešení:** Spočteme nejprve míru doplňku. V 1. kroku jsme z intervalu $[0,1]$ vyndali jeden interval o délce $1/3$. Ve druhém dva intervaly o délce $1/9$. Ve třetím 4 intervaly o délce $1/27$. Dostáváme tedy

$$\frac{1}{3} + \frac{2}{9} + \frac{4}{27} + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{n-1}}{3^n} = \frac{1}{3} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n}{3^n} = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{1 - \frac{2}{3}} = 1.$$

Doplněk Cantorova diskontinua v intervalu $[0,1]$ má tedy míru 1. Cantorovo diskontinuum tedy je míry 0.

**Úloha 10.** Najděte příklad množiny $A$ v $\mathbb{R}$ tak, aby $\mathcal{L}(A) > 0$,
$intA = \emptyset$.

**Řešení:** Např. $|\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}| = \infty$, ale $\operatorname{int} \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} = \emptyset$.

**Úloha 11** (PRAVDA – NEPRAVDA)**.** Nechť $E$ je měřitelná množina.

- Jestliže $|E| = 0$, pak $|\overline{E}| = 0$.

  **Řešení:** NEPRAVDA, např. $|\mathbb{Q}| = 0$, ale $|\mathbb{R}| = \infty$.

- Jestliže $|\overline{E}| = 0$, pak $|E| = 0$.

  **Řešení:** PRAVDA, plyne z přednášky ze zúplnění míry.

**Úloha 12.** Nechť $A \subset [0,1]$, $|A| > 0$. Ukažte, že pak existuje $x, y \in A$ tak, že $|x - y| \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.

**Řešení:** Předpokládejme, že pro všechna $x, y \in A$ platí $|x - y| \in \mathbb{Q}$. Pak lze $A$ zapsat jako $A \subset x_0 + \mathbb{Q}$ pro nějaké $x_0 \in A$. Tedy $A$ je spočetná a má míru 0, což je spor.

**Úloha 13** (PRAVDA – NEPRAVDA). 1. Existuje neměřitelná množina $A \subset \mathbb{R}$ taková, že množina $B = \{x \in A : x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}\}$ je měřitelná.

**Řešení:** NEPRAVDA. Uvažujme množinu $A \setminus B$. O ní víme, že $A \setminus B \subset \mathbb{Q}$, tedy je měřitelná (a míry 0). Ale pak je měřitelná $A \setminus B$ i $B$, tedy je měřitelné i jejich sjednocení, tedy $A$, což je spor.

2. Existují dvě neměřitelné množiny (v obecném prostoru $X$) $A$ a $B$ takové, že $A \cup B$ jsou měřitelné.

**Řešení:** PRAVDA. Uvažujme neměřitelnou množinu $A$ a její doplněk $A^c$. Ten musí být také neměřitelný, ale jejich sjednocení je celý prostor, který měřitelný je.

3. Nechť $A \subset [0,1]$ je neměřitelná množina. Uvažujme $B = \{(x,0) \in \mathbb{R}^2 : x \in A\}$. Pak $B$ je měřitelná podmnožina $\mathbb{R}^2$.

**Řešení:** PRAVDA. Množina $B$ je podmnožina úsečky $[0,1]$ v $\mathbb{R}^2$. Úsečka je míry 0, tedy i její podmnožina je měřitelná a míry 0.

**Definice 14.** Nechť $(X, \mathcal{A})$ je měřitelný prostor a $(Y, \tau)$ je metrický prostor. Řekneme, že zobrazení $f : X \to Y$ je *měřitelné*, jestliže $f^{-1}(V) \in \mathcal{A}$ pro každou $V \subset Y$ otevřenou.

**Úloha 15.** Rozhodněte, zda jsou následující funkce měřitelné:

1. $f(x) = \operatorname{sgn} x$ ANO.
2. $f(x) = e^x$ ANO.
3. $f(x) = \lfloor x \rfloor$ ANO.
4. Dirichletova funkce ANO.
5. Riemannova funkce ANO.
6. $f(x) = \chi_A$, kde $A \subset \mathbb{R}$ NE - co když $A$ je neměřitelná?

**Úloha 16** (PRAVDA – NEPRAVDA). 1. Nechť $f : (0,1) \to \mathbb{R}$ je funkce taková, že množina $\{x \in (0,1) : f(x) = c\}$ je měřitelná pro každé $c \in \mathbb{R}$. Pak $f$ je měřitelná.

**Řešení:** NEPRAVDA. Uvažujme neměřitelnou množinu $A \subset (0,1)$. Položme

$$f(x) = \begin{cases} x, & x \in A, \\ -x, & x \notin A. \end{cases}$$

Pak $\{x, f(x) = c\}$ je vždy prázdná nebo jednoprvková množina, tedy měřitelná. Ale $f^{-1}((0,1)) = A$, cože je neměřitelná množina. Tedy funkce $f$ není měřitelná.

2. Existuje neměřitelná funkce $f \geq 0$ taková, že $\sqrt{f}$ je měřitelná.

**Řešení:** NEPRAVDA. Lze psát $f = (\sqrt{f})^2$, což je složení měřitelné funkce $\sqrt{f}$ a spojité funkce $x^2$, tedy $f$ je měřitelná, což je spor.

3. Existuje neměřitelná funkce $f$ taková, že $|f|$ je měřitelná.

   **Řešení:** PRAVDA. Uvažujme neměřitelnou množinu $A$ a funkci

$$f(x) = \begin{cases} -1, & x \in A, \\ 1, & x \notin A. \end{cases}$$

   Pak $f$ je neměřitelná, ale $|f| = 1$ je spojitá a tedy měřitelná.

**Definice 17.** Nechť $f : X \to \mathbb{R}$ je funkce. Řekneme, že $f$ je *jednoduchá funkce*, jestliže $f(X)$ je konečná podmnožina $[0, \infty)$.

**Úloha 18.** Rozhodněte, zda jde o jednoduché funkce:

1. $\operatorname{sgn} x$ ANO.
2. $\chi_{CD}$ ANO.
3. $\lfloor x \rfloor$ na $(0, \infty)$. NE. Zobrazuje se na celé $\mathbb{N}_0$.
4. Dirichletova funkce ANO.
5. Riemannova funkce NE. Zobrazuje se na $\{0\} \cup \{\frac{1}{n}, n \in \mathbb{N}\}$.
6. Nezáporná schodovitá funkce (Schodovitá funkce je funkce tvaru $\sum_{i=0}^{n} \alpha_i \chi_{A_i}(x)$, kde $\alpha_i \in \mathbb{R}$, $A_i$ jsou intervaly.) ANO.

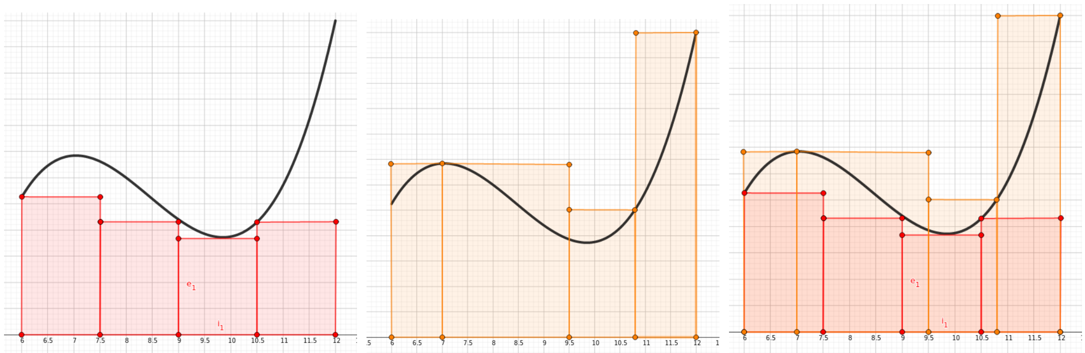
**Definice 19.** Nechť $(X, \mathcal{A}, \mu)$ je prostor s mírou a $s = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i \chi_{A_i}$ je jednoduchá měřitelná funkce. Pro $E \in \mathcal{A}$ definujeme

$$\int_E s \, \mathrm{d}\mu = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i \mu(A_i \cap E).$$

Pro $f : X \to [0, \infty]$ měřitelnou definujeme *Lebesgueův integrál*

$$\int_E f \, \mathrm{d}\mu = \sup \left\{ \int_E s \, \mathrm{d}\mu : 0 \leq s \leq f, s \text{ je jednoduchá měřitelná} \right\}.$$

**Úloha 20.** Jaký obrázek ilustruje Lebesgueův integrál?
Ten první.



**Úloha 21.** Určete Lebesgueův integrál $\int_0^1 f \, d\lambda$, kde $f$ je

1. $\chi_{\mathbb{Q}}$

   **Řešení:** $\int_0^1 f \, d\lambda = 0$

2. Dirichletova funkce

   **Řešení:** $\int_0^1 f \, d\lambda = 0$

3. $\chi_{CD}$

   **Řešení:** $\int_0^1 f \, d\lambda = 0$

4. $f(x) = \begin{cases} \sqrt{x}, & x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}, \\ 0, & x \in \mathbb{Q}. \end{cases}$

   **Řešení:** $\int_0^1 f \, d\lambda = \frac{2}{3}$

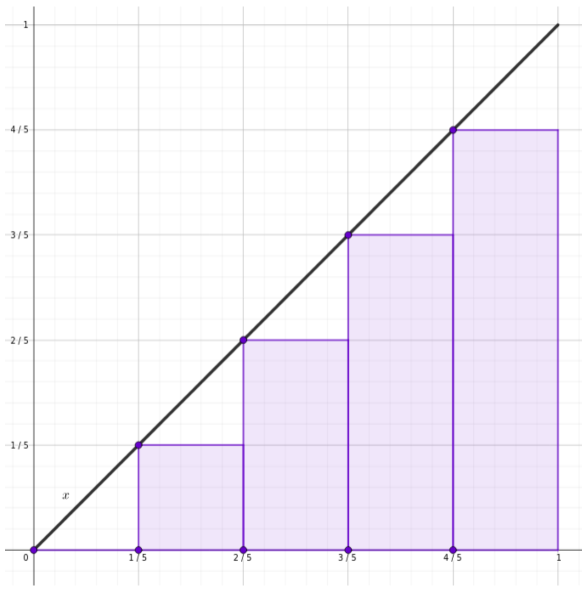
5. $f(x) = \begin{cases} \sqrt{x}, & x \in \mathbb{Q}, \\ 0, & x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}. \end{cases}$

   **Řešení:** $\int_0^1 f \, d\lambda = 0$

**Úloha 22.** Z definice odhadnětě Lebesgueův integrál $\int_0^1 x \, dx$. Stačí dolní odhad.

**Řešení:** Pro pevné $n \in \mathbb{N}$ rozdělme interval $[0,1]$ na intervaly $A_1 = (0, \frac{1}{n})$, $A_2 = (\frac{1}{n}, \frac{2}{n})$, $A_3 = (\frac{2}{n}, \frac{3}{n})$,... $A_n = (\frac{n-1}{n}, 1)$.

Na těchto intervalech vystavíme schodovitou funkci $s_n$, která je menší než $x$.




Pak

$$\int_0^1 s = 0 \cdot \frac{1}{n} + \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{n} + \frac{2}{n} \cdot \frac{1}{n} + \cdots + \frac{n-1}{n} \cdot \frac{1}{n} = \frac{1}{n^2} \cdot (0 + 1 + 2 + (n-1)) = \frac{n(n-1)}{2n^2}$$

Supremum přes tyto integrály je rovno $\lim_{n\to\infty} \frac{n(n-1)}{2n^2} = \frac{1}{2}$. Tedy odhad pro původní integrál je roven $\frac{1}{2}$.

## 2 Limita posloupnosti a integrál

### Příklady

Většinu příkladů z této kapitoly máme ze sbírky Příklady k teorii Lebesgueova integrálu, J. Lukeš: https://matematika.cuni.cz/lukes-pli.html.

1. Spočtěte

   (a) $\lim_{n\to\infty} \int_0^1 \frac{x^n}{n} \,\mathrm{d}x$

   **Řešení:**

   - Bodová limita: Zafixujeme $x \in (0,1)$. Pak
   $$\lim_{n\to\infty} \frac{x^n}{n} = 0.$$
   Tedy $f(x) = 0$ na $(0,1)$.
   - Lebesgue. Majoranta: $g(x) = 1$,
   $$\frac{x^n}{n} \leq 1$$
   a $\int_0^1 1 = 1 < \infty$.
   - Závěr:
   $$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 \frac{x^n}{n} = \int_0^1 0 = 0.$$

   (b) $\lim_{n\to\infty} \int_0^1 \frac{nx}{1+n^2x^2} \,\mathrm{d}x$

   **Řešení:**

   - Bodová limita pro $x \in (0,1)$:
   $$\lim_{n\to\infty} \frac{nx}{1+n^2x^2} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \cdot \frac{x}{\frac{1}{n^2} + 2x^2} = 0$$
   - Lebesgue. Majoranta: $g(x) = \frac{1}{2}$, neboť
   $$\begin{aligned} \frac{nx}{1+n^2x^2} &\leq \frac{1}{2} \\ 2nx &\leq 1 + n^2x^2 \\ 0 &\leq 1 - 2nx + n^2x^2 \\ 0 &\leq (1-nx)^2 \end{aligned}$$
   a $\int_0^1 \frac{1}{2} < \infty$.
   - Závěr:
   $$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 \frac{nx}{1+n^2x^2} = \int_0^1 0 = 0$$

(c) $\lim\limits_{n\to\infty}\displaystyle\int_0^1 \frac{x^n}{1+x^{2n}}\,\mathrm{d}x$

**Řešení:**

- Bodová limita pro $x \in (0,1)$:
$$\lim_{n\to\infty}\frac{x^n}{1+x^{2n}} = \frac{0}{1+0} = 0.$$
- Lebesgue. Majoranta $g(x) = 1$:
$$\begin{aligned}\frac{x^n}{1+x^{2n}} &\le 1\\ x^n &\le 1 + x^{2n}\end{aligned}$$
a $\int_0^1 1 < \infty$.
- Závěr:
$$\lim_{n\to\infty}\int_0^1 \frac{x^n}{1+x^{2n}} = \int_0^1 0 = 0.$$

(d) $\lim\limits_{n\to\infty}\displaystyle\int_0^\infty \frac{x^n}{1+x^{2n}}\,\mathrm{d}x$

**Řešení:** Nejprve integrál roztrhneme
$$\int_0^1 \frac{x^n}{1+x^{2n}}\,\mathrm{d}x + \int_1^\infty \frac{x^n}{1+x^{2n}}\,\mathrm{d}x$$
První integrál máme z předchozího příkladu, řešíme tedy jen $\int_1^\infty f_n(x)$.

- Bodová limita pro $x \in (1,\infty)$ je:
$$\lim_{n\to\infty}\frac{x^n}{1+x^{2n}} = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{1+x^n} = 0.$$
- Lebesgue. Zkusíme najít majorantu pomocí derivace. Zafixujme $x \in (1,\infty)$ a definujme
$$g_x(n) = \frac{x^n}{1+x^{2n}}$$
Hledáme supremum funkce $g_x(n)$ vzhledem k $n$. (Pro výpočet bereme $n \in [1,\infty)$). Supremum hledáme v bodech, kde je nulová derivace, kde derivace neexistuje nebo v krajních bodech.
Pak
$$g_x'(n) = -\frac{x^n(x^{2n}-1)\log x}{(x^{2n}+1)^2}$$
Pro $n \in (1,\infty)$ není derivace nikdy nulová, navíc je vždy ostře záporná. Supremum tedy hledáme v bodě $n = 1$. Tedy zkusme $g(x) = \frac{x^1}{1+x^{2\cdot 1}}$.
Zároveň ale platí $\int_1^\infty \frac{x}{1+x^2} = \infty$, tedy $g(x)$ není vhodnou majorantou.
Řešení: hledejme majorantu až pro $n \ge 2$. Pak bude $\bar{g}(x) = \frac{x^2}{1+x^4}$, navíc $\int_1^\infty \frac{x^2}{1+x^4} < \infty$. Tedy jsme našli majorantu a můžeme použít Lebesgueovu větu.

- Závěr:
$$\lim_{n\to\infty}\int_0^\infty \frac{x^n}{1+x^{2n}} = \int_0^\infty 0 = 0.$$

(e) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\int_0^A \frac{e^{x^3}}{1+nx}\,\mathrm{d}x, \qquad 0<A<\infty$

**Řešení:**

- Bodová limita pro $x\in(0,A)$:
$$\lim_{n\to\infty}\frac{e^{x^3}}{1+nx}=0.$$
- Lebesgue. Majoranta: $g(x)=e^{x^3}$.
Majoranta je integrovatelná, protože $g(x)$ je spojitá na $[0,A]$ (omezeném uzavřeném).
- Závěr:
$$\lim_{n\to\infty}\int_0^A \frac{e^{x^3}}{1+nx} = \int_0^A 0 = 0.$$

(f) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\int_0^\infty \frac{\ln(x+n)}{n}e^{-x}\cos x\,\mathrm{d}x$

**Řešení:**

- Bodová limita pro $x\in(0,\infty)$ z růstové škály:
$$\lim_{n\to\infty}\frac{\ln(x+n)}{n}e^{-x}\cos x=0$$
- Lebesgue. Majoranta:
$$\frac{\log(x+n)}{n}\le\frac{x+n}{n}\le 1+x.$$
Celkem
$$\left|\frac{\ln(x+n)}{n}e^{-x}\cos x\right|\le(1+x)\cdot 1\cdot e^{-x}.$$
Navíc víme, že $\int_0^\infty(1+x)e^{-x}<\infty$.
- Závěr:
$$\lim_{n\to\infty}\int_0^\infty \frac{\ln(x+n)}{n}e^{-x}\cos x = \int_0^\infty 0 = 0.$$

(g) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\int_0^\infty e^{-nx}\frac{\sin ax}{x}\,\mathrm{d}x \qquad a\in\mathbb{R}$

**Řešení:**

- Bodová limita pro $x\in(0,\infty)$:
$$\lim_{n\to\infty}e^{-nx}\frac{\sin ax}{x}=0$$
- Lebesgue. Majoranta: Platí $|\sin t|\le t$ pro $t\in(0,\infty)$. Tedy
$$\left|e^{-nx}\frac{\sin ax}{x}\right|\le\left|e^{-nx}\frac{ax}{x}\right|\le e^{-x}|a|$$
a $\int_0^\infty e^{-x}<\infty$.

- Závěr:
$$\lim_{n\to\infty}\int_0^\infty e^{-nx}\frac{\sin ax}{x} = \int_0^\infty 0 = 0.$$

(h) $\lim\limits_{n\to\infty}\int_0^\infty e^{-x^n}\,\mathrm{d}x$

**Řešení:**

- Bodová limita pro $x \in (0,\infty)$:
$$\lim_{n\to\infty} e^{-x^n} = \begin{cases} e^0 = 1, & x < 1 \\ \text{“}e^{-\infty} = 0\text{”}, & x > 1. \end{cases}$$
- Lebesgue. Majoranta:
$$g(x) = \begin{cases} 1, & x < 1 \\ e^{-x}, & x > 1 \end{cases}$$
- Závěr:
$$\lim_{n\to\infty}\int_0^\infty e^{-x^n} = \int_0^1 1 = 1.$$

(i) $\lim\limits_{n\to\infty}\int_0^1 \frac{\sqrt{n^3}x}{1+n^2x^2}\,\mathrm{d}x$

**Řešení:**

- Bodová limita pro $x \in (0,1)$
$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n^3}x}{1+n^2x^2} = 0$$
- Lebesgue. Majoranta nalezneme pomocí derivování. Pro pevné $x \in (0,1)$ definujme $g_x(n) = \frac{\sqrt{n^3}x}{1+n^2x^2}$, $n \in [1,\infty)$. Pak
$$g_x'(n) = \frac{\frac{3}{2}\sqrt{n}(1+n^2x^2) - n\sqrt{n}2nx^2}{(1+n^2x^2)^2}$$
Nulový bod:
$$\begin{aligned} \frac{3}{2}(1+n_0^2x^2) - 2n_0^2x^2 &= 0 \\ \frac{3}{2} &= \frac{1}{2}n_0^2x^2 \\ \frac{3}{x^2} &= n_0^2 \\ \frac{\sqrt{3}}{x} &= n_0 \end{aligned}$$
Pak
$$g_x(n_0) = \frac{x\cdot 3^{3/4}}{x^{3/2}}\cdot\frac{1}{1+3} = \frac{3^{3/4}}{4\sqrt{x}}$$
Přidáme „krajní body“, tedy majoranta
$$g(x) = \max\left\{\frac{x}{1+x^2}, 0, \frac{3^{3/4}}{4\sqrt{x}}\right\}$$
Navíc jistě $\int_0^1 g(x) < \infty$.

- Závěr:
$$\lim_{n\to\infty}\int_0^1 \frac{\sqrt{n^3}x}{1+n^2x^2}\int_0^1 0 = 0.$$