3. cvičení – Míra + Limita posloupnosti a integrál

https://www2.karlin.mff.cuni.cz/~kuncova/vyuka.php, kuncova@karlin.mff.cuni.cz

1 Míra a Lebesgueův integrál

Definice 1. Nechť $\mathcal{A} \subset \exp(X)$. Systém množin $\mathcal{A}$ se nazývá *σ-algebra*, pokud

1. $X \in \mathcal{A}$,
2. $A \in \mathcal{A} \Rightarrow X \setminus A \in \mathcal{A}$,
3. $A_k \in \mathcal{A}, k \in \mathbb{N}, \Rightarrow \bigcup_k A_k \in \mathcal{A}$.

Úloha 2. Určete, zda jde o σ-algebru v prostoru X.

1. $\{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{a,b\}, \{b,c,d\}, \{a,c,d\}, \{c,d\}, \{a,b,c,d\}, \}$, kde $X = \{a,b,c,d\}$.
2. $\{\emptyset, X, A, A^c\}$
3. $\{A \subset X : A$ nebo A^c je konečná$\}$
4. $\{A \subset X : A$ nebo A^c je spočetná$\}$ (spočetná znamená i konečná nebo $\emptyset$)
5. $\{(-\infty, a], (a,b], (b,\infty), \emptyset, \mathbb{R}\}$

Poznámka 3. *Borelovskou σ-algebrou* rozumíme nejmenší σ-algebru obsahující otevřené množiny.

Úloha 4. Ověřte, že následující množiny patří do borelovské σ-algebry na $\mathbb{R}$. (Vyjádřete je pomocí doplňků a spočetných (nebo konečných) sjednocení otevřených množin. A doplňků a sjednocení takto vzniklých množin a doplňků a...)

1. $[0,1]$
2. $[0,1)$
3. $(0,1]$
4. $\mathbb{N}$
5. $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$
6. $\mathbb{Q}_+$
7. uzavřené množiny

Definice 5. Nechť $(X, \mathcal{A})$ je měřitelný prostor. Množinová funkce $\mu : \mathcal{A} \to [0,\infty]$ se nazývá *míra*, pokud není identicky rovna ∞ a je σ-aditivní, tedy

$$A_k \in \mathcal{A}, k \in \mathbb{N}, \text{ jsou po dvou disjunktní, pak } \mu\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k\right) = \sum_{k=1}^{\infty} \mu(A_k).$$

Poznámka 6. Pro *Lebesgueovu míru* $\mathcal{L}$ platí, že intervaly jsou měřitelné množiny a že zachovává jejich délku, tedy $\mathcal{L}((a,b)) = b - a$ (pro uzavřené, polouzavřené, polootevřené a degenerované intervaly to platí také). Někdy značíme také $\lambda((a,b))$ nebo $|(a,b)|$. Navíc platí, že jestliže $A \subset B$ a $\mathcal{L}(B) = 0$, tak i $\mathcal{L}(A) = 0$.

Úloha 7. Určete $\mathcal{L}$ míru množiny

1. $[0,1]$
2. $(0,1)$
3. $[2,6)$
4. $[0,\infty)$
5. $\{-\pi\}$
6. $\mathbb{Q}$
7. přímka v $\mathbb{R}^2$
8. $\mathbb{Q} \times (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q})$ v $\mathbb{R}^2$
9. krychle $[0,2] \times [0,2] \times [0,2]$

Poznámka 8. (Podle https://www.physics.muni.cz/~tomtyc/teorfyzzaj/fraktaly_chaos-MSarbort.pdf.)

Cantorovým diskontinuem rozumíme množinu vzniklou následujícím postupem:

1. Označme $C_0 = [0,1]$.

2. Z této množiny „vyndáme prostřední třetinu“ - interval $(\frac{1}{3}, \frac{2}{3})$. Zbylou množinu označme C_1, tedy $C_1 = [0, \frac{1}{3}] \cup [\frac{2}{3}, 1]$.
3. Z intervalů množiny C_1 opět vyjmeme prostřední třetiny. Získáme množinu $C_2 = [0, \frac{1}{9}] \cup [\frac{2}{9}, \frac{1}{3}] \cup [\frac{2}{3}, \frac{7}{9}] \cup [\frac{8}{9}, 1]$.
4. Postup iterujeme, vyndavame další třetiny a definujeme množiny C_n.
5. Cantorovo diskontinuum je pak definováno jako $CD = \bigcap_n C_n$.

https://cs.wikipedia.org/wiki/Cantorovo_diskontinuum

Úloha 9 (✿). Určete míru Cantorova diskontinua.

Úloha 10. Najděte příklad množiny A v $\mathbb{R}$ tak, aby $\mathcal{L}(A) > 0$, $\operatorname{int} A = \emptyset$.

Úloha 11 (PRAVDA – NEPRAVDA). Nechť E je měřitelná množina.

- Jestliže $|E| = 0$, pak $|\overline{E}| = 0$.
- Jestliže $|\overline{E}| = 0$, pak $|E| = 0$.

Úloha 12 (✻). Nechť $A \subset [0,1]$, $|A| > 0$. Ukažte, že pak existuje $x, y \in A$ tak, že $|x - y| \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.

Úloha 13 (PRAVDA – NEPRAVDA).
1. ✷ Existuje neměřitelná množina $A \subset \mathbb{R}$ taková, že množina $B = \{x \in A : x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}\}$ je měřitelná.
2. ❀ Existují dvě neměřitelné množiny (v obecném prostoru X) A a B takové, že $A \cup B$ jsou měřitelné.
3. Nechť $A \subset [0,1]$ je neměřitelná množina. Uvažujme $B = \{(x, 0) \in \mathbb{R}^2 : x \in A\}$. Pak B je měřitelná podmnožina $\mathbb{R}^2$.

Definice 14. Nechť $(X, \mathcal{A})$ je měřitelný prostor a (Y, τ) je metrický prostor. Řekneme, že zobrazení $f : X \to Y$ je *měřitelné*, jestliže $f^{-1}(V) \in \mathcal{A}$ pro každou $V \subset Y$ otevřenou.

Úloha 15. Rozhodněte, zda jsou následující funkce měřitelné:

1. $f(x) = \operatorname{sgn} x$
2. $f(x) = e^x$
3. $f(x) = \lfloor x \rfloor$
4. Dirichletova funkce
5. Riemannova funkce
6. $f(x) = \chi_A$, kde $A \subset \mathbb{R}$.

Úloha 16 (PRAVDA – NEPRAVDA).
1. ✤ Nechť $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ je funkce taková, že množina $\{x \in [0,1] : f(x) = c\}$ je měřitelná pro každé $c \in \mathbb{R}$. Pak f je měřitelná.
2. Existuje neměřitelná funkce $f \geq 0$ taková, že $\sqrt{f}$ je měřitelná.
3. Existuje neměřitelná funkce f taková, že $|f|$ je měřitelná.

Definice 17. Nechť $f : X \to \mathbb{R}$ je funkce. Řekneme, že f je *jednoduchá funkce*, jestliže $f(X)$ je konečná podmnožina $[0, \infty)$.

Úloha 18. Rozhodněte, zda jde o jednoduché funkce:

1. $\operatorname{sgn} x$
2. χ_{CD}
3. $\lfloor x \rfloor$ na $(0, \infty)$.
4. Dirichletova funkce
5. Riemannova funkce
6. Nezáporná schodovitá funkce (Schodovitá funkce je funkce tvaru $\sum_{i=0}^{n} \alpha_i \chi_{A_i}(x)$, kde $\alpha_i \in \mathbb{R}$, A_i jsou intervaly.)

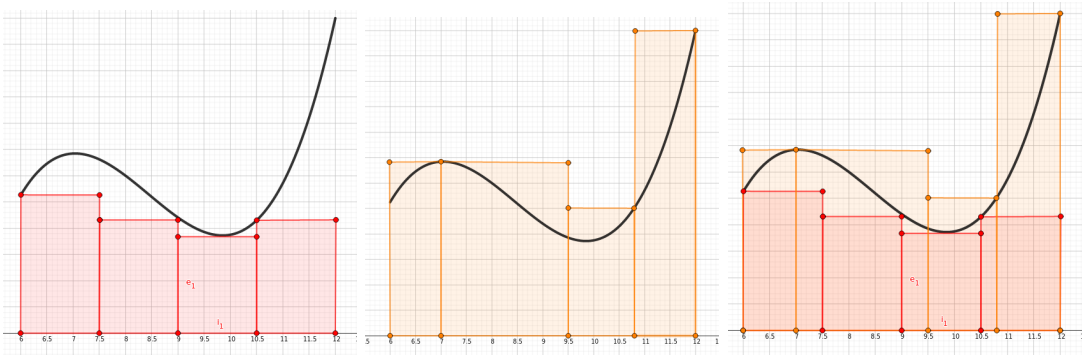
Definice 19. Nechť $(X, \mathcal{A}, \mu)$ je prostor s mírou a $s = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i \chi_{A_i}$ je jednoduchá měřitelná funkce. Pro $E \in \mathcal{A}$ definujeme

$$\int_E s \, \mathrm{d}\mu = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i \mu(A_i \cap E).$$

Pro $f : X \to [0, \infty]$ měřitelnou definujeme *Lebesgueův integrál*

$$\int_E f \, \mathrm{d}\mu = \sup \left\{ \int_E s \, \mathrm{d}\mu : 0 \leq s \leq f, s \text{ je jednoduchá měřitelná} \right\}.$$

Úloha 20. Jaký obrázek ilustruje Lebesgueův integrál?



Úloha 21 (♡)**.** Určete Lebesgueův integrál $\int_0^1 f \, \mathrm{d}\lambda$, kde f je

1. $\chi_{\mathbb{Q}}$
2. Dirichletova funkce
3. χ_{CD}
4. $f(x) = \begin{cases} \sqrt{x}, & x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}, \\ 0, & x \in \mathbb{Q}. \end{cases}$
5. $f(x) = \begin{cases} \sqrt{x}, & x \in \mathbb{Q}, \\ 0, & x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}. \end{cases}$

Úloha 22. Z definice odhadnětě Lebesgueův integrál $\int_0^1 x \, \mathrm{d}x$. Stačí dolní odhad.

2 Limita posloupnosti a integrál

Teorie

Věta 23 (Levi)**.** Nechť $\{f_n\}$ je posloupnost měřitelných funkcí na D, $0 \leq f_1 \leq f_2 \leq \ldots$ a $f = \lim_{n \to \infty} f_n$. Pak

$$\int_D f \, \mathrm{d}\mu = \lim_{n \to \infty} \int_D f_n \, \mathrm{d}\mu.$$

Věta 24 (Lebesgue)**.** Nechť f a $\{f_n\}$ jsou měřitelné funkce na D, Nechť posloupnost $\{f_n\}$ konverguje skoro všude k f. Nechť existuje funkce $g \in L^1(D)$ (majoranta) tak, že

$$|f_n(x)| \leq |g(x)|, \qquad \forall n \in \mathbb{N}, \quad \forall x \in D.$$

Potom

$$\int_D f \,\mathrm{d}\mu = \lim_{n\to\infty} \int_D f_n \,\mathrm{d}\mu.$$

Algoritmus

1. **Zafixujeme** $x \in (a, b)$ a spočteme $\lim_{n\to\infty} f_n$.
2. Jsou funkce **nezáporné** a posloupnost je **neklesající** - pro pevné x roste v n? Levi.
3. Lze najít **majorantu**? Lebesgue.
   (a) Lze použít nějakou **základní nerovnost**? $x \leq 1$ pro $x \in [0, 1]$, $|\sin x| \leq 1$, $|\sin x| \leq x$ pro $x \geq 0$, $\ln x \leq x - 1$, $e^{-x} < 1$ pro $x > 0$, $(a \pm b)^2 \geq 0$? Nelze zmenšit jmenovatele, vzít jen 1 člen součtu?
   (b) Když nevíš, tak **derivuj**: funkci $g_x(n)$, $n \in [1, \infty)$, podle n. Maximum je pak v n_0 - bodu s nulovou derivací nebo v krajních bodech (tedy $n_0 = 1$ nebo v $\lim_{n\to\infty}$).
   (c) Nenašla by se majoranta **alespoň** pro $n \geq 2$?
4. **Prohodíme** limitu a integrál.

Příklady

1. Spočtěte $\lim_{n\to\infty}$ ($a \in \mathbb{R}$, $A \in (0, \infty)$)

(a) $\displaystyle\int_0^1 \frac{x^n}{n} \,\mathrm{d}x$

(b)✶ $\displaystyle\int_0^1 \frac{nx}{1 + n^2x^2} \,\mathrm{d}x$

(c) $\displaystyle\int_0^1 \frac{x^n}{1 + x^{2n}} \,\mathrm{d}x$

(d)❀ $\displaystyle\int_0^\infty \frac{x^n}{1 + x^{2n}} \,\mathrm{d}x$

(e) $\displaystyle\int_0^A \frac{e^{x^3}}{1 + nx} \,\mathrm{d}x$

(f)❀ $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\ln(x + n)}{n} e^{-x} \cos x \,\mathrm{d}x$

(g) $\displaystyle\int_0^\infty e^{-nx} \frac{\sin ax}{x} \,\mathrm{d}x$

(h)❄ $\displaystyle\int_0^\infty e^{-x^n} \,\mathrm{d}x$

(i) $\displaystyle\int_0^1 \frac{\sqrt{n^3}x}{1 + n^2x^2} \,\mathrm{d}x$

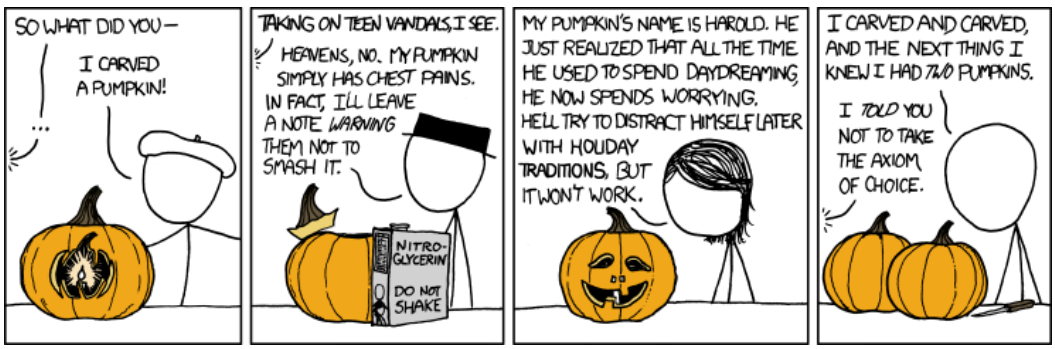


Figure 1: https://xkcd.com/804/

- 9 Spočtěte míru doplňku.
- 12 Sporem.
- 13.1 Uvažujte $A \setminus B$
- 13.2 Uvažujte A a A^c
- 16.1 $f(x) = x$ pro $x \in A$, A je nemeřitelná, jinak $f(x) = -x$.
- (1b) $g(x) = 1/2$
- 21 Leb. $\int$ nezávisí na spočetně mnoha bodech.
- (1d) Rozthněte, volte majorantu až pro $n \geq 2$
- (1f) Použijte odhad $\frac{\ln(x+n)}{n} < \frac{x+n}{n} \leq (1 + x)$
- (1h) Odhadujte zvlášť $(0, 1)$ a $(1, \infty)$