2. cvičení – Absolutní konvergence integrálu 2

https://www2.karlin.mff.cuni.cz/~kuncova/vyuka.php, kuncova@karlin.mff.cuni.cz

Příklady

1. Vyšetřete **absolutní** konvergenci integrálů ($\alpha \in \mathbb{R}$):

   (a) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin\left(\frac{1}{\sin x}\right) \,\mathrm{d}x$

   Řešení: Integrál konverguje ze SK: $|f(x)| \leq 1$ na $[0, \frac{\pi}{2}]$.

   (b) $\displaystyle\int_0^1 x^\alpha \log(1+x) \sin x \,\mathrm{d}x$

   Řešení: Funkce je spojitá na $(0, 1]$. U 0 LSK s $g(x) = x^\alpha \cdot x \cdot x$. Máme $\int_0^1 x^{\alpha+2} \,\mathrm{d}x$ konverguje právě tehdy, když $\alpha + 2 > -1$, tedy $\alpha > -3$.

$$\lim_{x\to 0+} \frac{x^\alpha \log(1+x) \sin x}{x^\alpha \cdot x \cdot x} \overset{VOAL}{=} 1 \cdot 1 \cdot 1 \in (0, \infty).$$

   Závěr: $\int_0^1 f(x)$ konverguje právě tehdy, když konverguje $\int_0^1 g(x)$, což je právě pro $\alpha > -3$.

   (c) $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{x\sqrt{x}} \cos \frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}} \,\mathrm{d}x$

   Řešení: Funkce f je spojitá na $(0, 1]$, podezřelý bod je tedy 0. Přepíšeme a pak substituujeme $y = \frac{1}{\sqrt{x}} - 1$, $\mathrm{d}y = -\frac{1}{2}x^{-3/2}$.

$$\int_0^1 \frac{1}{x\sqrt{x}} \left|\cos \frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}}\right| \,\mathrm{d}x = \int_0^1 \frac{1}{x\sqrt{x}} \left|\cos\left(\frac{1}{\sqrt{x}} - 1\right)\right| \,\mathrm{d}x = \int_1^\infty 2|\cos y| = \infty.$$

   Závěr: integrál diverguje.

   (d) $\displaystyle\int_0^\infty x^{s-1} e^{-x} \,\mathrm{d}x$

   Řešení: Problematické body: 0 a ∞.
   U 0 srovnáme s $g(x) = x^{s-1}$.

$$\lim_{x\to 0+} \frac{x^{s-1}e^{-x}}{x^{s-1}} = 1.$$

   Protože $\int_0^1 g(x)$ konverguje právě tehdy, když $s > 0$, tak i $\int_0^1 f(x)$ konverguje právě tehdy, když $s > 0$.
   U ∞ srovnáme s $g(x) = e^{\frac{x}{2}} e^{-x} = e^{-\frac{x}{2}}$.

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^{s-1}e^{-x}}{e^{\frac{x}{2}}e^{-x}} = 0.$$

   Protože $\int_1^\infty e^{-\frac{x}{2}}$ konverguje (lze upočítat), tak konverguje i $\int_1^\infty f(x)$.
   Závěr: integrál konverguje pro všechna $s > 0$.

(e) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha x^2}\,\mathrm{d}x$

Řešení: Pro $\alpha \leq 0$ máme $e^{-\alpha x^2} \geq 1$. Ze SK tedy plyne, že $\int_0^\infty f(x) \geq \int_0^\infty 1 = \infty$. Navíc $\int_{-\infty}^\infty f(x) = 2\int_0^\infty f(x)$. Tedy diverguje.
Pro $\alpha > 0$ máme: $f(x)$ je spojitá na $[0,1]$. Na intervalu $[1,\infty)$ máme SK:

$$f(x) \leq e^{-\alpha x},$$

kde $\int_1^\infty e^{-\alpha x}$ konverguje. Integrál $\int_{-\infty}^\infty f(x)$ konverguje ze sudosti funkce $f(x)$.
Závěr: Integrál konverguje právě pro $\alpha > 0$.

(f) $\displaystyle\int_0^1 \frac{\arccos x}{\log^\alpha \frac{1}{x}}\,\mathrm{d}x$

Řešení: U 0 LSK s $g(x) = (\log\frac{1}{x})^{-\alpha} = (-\log x)^{-\alpha}$.

$$\lim_{x\to 0+} \frac{\frac{\arccos x}{\log^\alpha \frac{1}{x}}}{(\log\frac{1}{x})^{-\alpha}} = \frac{\pi}{2} \in (0,\infty).$$

Tedy $\int_0^{\frac{1}{2}}$ konverguje právě tehdy, když konverguje $\int_0^{\frac{1}{2}} g(x)$. Ted LSK s $h(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$:

$$\lim_{x\to 0+} \frac{\log^\alpha \frac{1}{x}}{\frac{1}{\sqrt{x}}} = 0$$

(ze škály). Protože $\int_0^{\frac{1}{2}} h(x)$ konverguje, tak konverguje i původní $\int_0^{\frac{1}{2}} f(x)$ pro $\alpha \in \mathbb{R}$..
U 1: LSK s $g(x) = \frac{\sqrt{1-x}}{(1-x)^\alpha} = (1-x)^{\frac{1}{2}-\alpha}$.

$$\lim_{x\to 1-} \frac{\frac{\arccos x}{\log^\alpha \frac{1}{x}}}{\frac{\sqrt{1-x}}{(1-x)^\alpha}} = \sqrt{2}\cdot 1.$$

Tedy $\int_{\frac{1}{2}}^1 f(x)$ konverguje právě tehdy, když konverguje integrál $\int_{\frac{1}{2}}^1 g(x)$, což je právě pro $\frac{1}{2} - \alpha > -1$ (lze přímo upočítat).
Závěr: Konverguje právě tehdy, když $\alpha < \frac{3}{2}$.

(g) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \log(\cos x)\tan^\alpha x\,\mathrm{d}x$

Řešení: Nejprve přepíšeme

$$\log(\cos x)\tan^\alpha x = \log(\cos x)\frac{\sin^\alpha x}{\cos^\alpha x}$$

U 0 srovnáme s $g(x) = (1-\cos x)x^\alpha$.

$$\lim_{x\to 0+} \frac{|\log(\cos x)|\frac{\sin^\alpha x}{\cos^\alpha x}}{(1-\cos x)x^\alpha} = 1\cdot 1\cdot 1$$

Následně srovnáme LSK funkci $g(x)$ s funkcí $g(x) = x^2 x^\alpha$.

$$\lim_{x\to 0+} \frac{(1-\cos x)x^\alpha}{x^2 x^\alpha} = \frac{1}{2}$$

Tedy $\int_0^{\frac{\pi}{4}} f(x)$ konverguje právě tehdy, když konverguje $\int_0^{\frac{\pi}{4}} g(x)$, což platí právě pro $2+\alpha > -1$, tedy $\alpha > -3$.

U $\frac{\pi}{2}$ srovnáme s funkcí $g(x) = \log(\cos x)\frac{\sin x}{\cos^\alpha x}$.

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}-} \frac{\log(\cos x)\frac{\sin^\alpha x}{\cos^\alpha x}}{\log(\cos x)\frac{\sin x}{\cos^\alpha x}} = 1.$$

Dále vyšetříme integrál

$$\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \log(\cos x)\frac{\sin x}{\cos^\alpha x}\,\mathrm{d}x$$

po substituci $y = \cos x$

$$\int_0^{\sqrt{2}/2} \frac{\log(y)}{y^\alpha}\,\mathrm{d}y$$

Tento integrál ale konverguje právě pro $\alpha < 1$.

Závěr: původní integrál konverguje pro $\alpha \in (-3, 1)$.

(h) $\displaystyle\int_0^\infty x^{s-1}|\ln x|^k e^{-x}\,\mathrm{d}x$

Řešení:

Problematické body: 0, 1, ∞.

U 0: LSK s $g(x) = x^{s-1}|\ln x|^k$.

$$\lim_{x\to 0+} \frac{x^{s-1}|\ln x|^k e^{-x}}{x^{s-1}|\ln x|^k} = 1.$$

Tedy $\int_0^{\frac{1}{2}} f$ konverguje právě tehdy, když konverguje $\int_0^{\frac{1}{2}} g$. Což je právě tehdy, když $(s-1 > -1, k \in \mathbb{R}) \vee (s-1 = -1, k < -1)$ neboli $(s > 0, k \in \mathbb{R}) \vee (s = 0, k < -1)$.

U 1 zleva: srovnáme s $g(x) = |x-1|^k$:

$$\lim_{x\to 1-} \frac{x^{s-1}|\ln x|^k e^{-x}}{|x-1|^k} = \frac{1}{e}.$$

Tedy $\int_{\frac{1}{2}}^1 f$ konverguje právě tehdy, když konverguje $\int_{\frac{1}{2}}^1 g$. Což je právě tehdy, když $k > -1$.

U 1 zprava provedeme analogicky a vyjde, že $\int_1^3 f$ konverguje právě tehdy, když $k > -1$.

U ∞: Srovnáme s $g(x) = x^{s-1}x^k e^{-x}$.

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^{s-1}|\ln x|^k e^{-x}}{x^{s-1}x^k e^{-x}} = 0.$$

Protože $\int_3^\infty x^{s-1+k}e^{-x}$ konverguje pro libovolné s, k, tak konverguje i $\int_3^\infty f$.

Závěr: Integrál $\int_0^\infty f$ konverguje právě tehdy, když $(s > 0, k > -1)$.

2. Příklady z loňska: Vyšetřete **absolutní** konvergenci integrálů, $\alpha, \beta, a, b, k, p, q, s \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$:

(a) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{tg}^\alpha x \,\mathrm{d}x$

Řešení: Problematické body 0 i $\frac{\pi}{2}$.
U 0 srovnáme s $g(x) = x^\alpha$:

$$\lim_{x\to 0+} \frac{\tan^\alpha x}{x^\alpha} = 1.$$

Tedy dle LSK $\int_0^{\frac{\pi}{4}} f(x)$ konverguje právě pro $\alpha > -1$.
U $\frac{\pi}{2}$ srovnáme s $g(x) = (\frac{\pi}{2} - x)^{-\alpha}$.

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}-} \frac{\tan^\alpha x}{(\frac{\pi}{2} - x)^{-\alpha}} = 1.$$

Tedy $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} f(x)$ konverguje právě tehdy, když konverguje $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} g(x)$ Ten ale konverguje právě pro $\alpha < 1$ (lze upočítat).
Závěr: integrál konverguje právě pro $\alpha \in (-1, 1)$.

(b) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{|\ln x|^\alpha}{1 + x^k} \,\mathrm{d}x$

Řešení: Problematické body: 0, 1, ∞. Budeme tedy vyšetřovat integrály

$$\int_0^{\frac{1}{2}} f(x) + \int_{\frac{1}{2}}^1 f(x) + \int_1^e f(x) + \int_e^\infty f(x)$$

U 0:

- $k \geq 0$ LSK s $g(x) = |\ln x|^\alpha$. Pak

$$\lim_{x\to 0+} \frac{\frac{|\ln x|^\alpha}{1+x^k}}{|\ln x|^\alpha} = \begin{cases} 1, & k > 0 \\ \frac{1}{2}, & k = 0 \end{cases}$$

  Protože $\int_0^{\frac{1}{2}} g(x)$ konverguje pro $\alpha \in \mathbb{R}$, tak z LSK konverguje i $\int_0^{\frac{1}{2}} f(x)$.
- $k < 0$ LSK s $g(x) = \frac{|\ln x|^\alpha}{x^k}$. Pak

$$\lim_{x\to 0+} \frac{\frac{|\ln x|^\alpha}{1+x^k}}{\frac{|\ln x|^\alpha}{x^k}} = \frac{x^k}{1 + x^k} = \frac{1}{x^{-k} + 1} = 1$$

Protože $\int_0^{\frac{1}{2}} g(x)$ konverguje pro $k, \alpha \in \mathbb{R}$, tak z LSK konverguje i $\int_0^{\frac{1}{2}} f(x)$.
Zatím máme: u 0 konverguje pro všechna $k, \alpha \in \mathbb{R}$.
U 1: srovnáme s $g(x) = |1 - x|^\alpha$.

$$\lim_{x\to 1-} \frac{\frac{|\ln x|^\alpha}{1+x^k}}{|1 - x|^\alpha} = \frac{1}{2}$$

Protože $\int_{\frac{1}{2}}^1 g(x)$ konverguje pro $\alpha > -1$, tak z LSK i $\int_{\frac{1}{2}}^1 f(x)$ konverguje právě pro $\alpha > -1$.
U 1 zprava srovnáme se stejnou funkcí a též vyjde, že $\int_1^e f(x)$ konverguje pro $\alpha > -1$.
U ∞:

- $k \geq 0$: Srovnáme s $g(x) = \frac{|\ln x|^\alpha}{x^k}$.

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\frac{|\ln x|^\alpha}{1+x^k}}{\frac{|\ln x|^\alpha}{x^k}} = \begin{cases} 1, & k > 0 \\ \frac{1}{2}, & k = 0 \end{cases}$$

  Navíc $\int_e^\infty g(x)$ konverguje právě tehdy, když $(k > 1, \alpha \in \mathbb{R}) \vee (k = 1, \alpha < -1)$. Z LSK pak stejně konverguje i $\int_e^\infty f(x)$, tedy pro $(k > 1, \alpha \in \mathbb{R}) \vee (k = 1, \alpha < -1)$.
- $k < 0$. Srovnáme s $g(x) = |\ln x|^\alpha$.

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\frac{|\ln x|^\alpha}{1+x^k}}{|\ln x|^\alpha} = 1$$

  Ale $\int_e^\infty g(x)$ nekonverguje pro žádné $\alpha \in \mathbb{R}$.

Závěr: $\int_0^\infty f(x)$ konverguje právě tehdy, když $k > 1$ a zároveň $\alpha > -1$.

(c) $\displaystyle\int_1^2 \frac{e^x}{\sqrt{x^2-1}}\,\mathrm{d}x$

Řešení: Srovnáme s $g(x) = \frac{1}{\sqrt{x-1}}$.

$$\lim_{x\to 1-} \frac{\frac{e^x}{\sqrt{x^2-1}}}{\frac{1}{\sqrt{x-1}}} = \frac{e}{\sqrt{2}}.$$

Protože $\int_1^2 g(x)$ konverguje, tak konverguje i původní $\int_1^2 f(x)$.

(d) $\displaystyle\int_0^\infty x^\alpha \arctan^\beta x\,\mathrm{d}x$

Řešení: U 0 srovnáme s $g(x) = x^{\alpha+\beta}$.

$$\lim_{x\to 0+} \frac{x^\alpha \arctan^\beta x}{x^{\alpha+\beta}} = 1.$$

Máme $\int_0^1 g(x)$ konverguje právě pro $\alpha + \beta > -1$, z LSK i $\int_0^1 f(x)$ konverguje právě pro $\alpha + \beta > -1$.

U ∞ srovnáme s x^α.

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^\alpha \arctan^\beta x}{x^\alpha} = \left(\frac{\pi}{2}\right)^\beta.$$

Z LSK pak $\int_1^\infty f(x)$ konverguje právě pro $\alpha < -1$.

Závěr: $\int_0^\infty f(x)$ konvergence právě pro $\alpha < -1$ a zároveň $-1 < \alpha + \beta$.

(e) $\displaystyle\int_1^2 \frac{\arctan(x-1)}{(x-\sqrt{x})^p}\,\mathrm{d}x$

Řešení: Problematický bod: 1. Srovnáme s $g(x) = \frac{x-1}{(x-\sqrt{x})^p}$.

$$\lim_{x\to 1+} \frac{\frac{\arctan(x-1)}{(x-\sqrt{x})^p}}{\frac{x-1}{(x-\sqrt{x})^p}} = 1.$$

Zbývá vyšetřit konvergenci integrálu $\int_1^2 \frac{x-1}{(x-\sqrt{x})^p}$. Upravíme na

$$\frac{x-1}{(x-\sqrt{x})^p} = \frac{x-1}{(\sqrt{x})^p(\sqrt{x}-1)^p} = \frac{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)}{(\sqrt{x})^p(\sqrt{x}-1)^p} = \frac{(\sqrt{x}+1)}{(\sqrt{x})^p(\sqrt{x}-1)^{p-1}}$$

Srovnáme s $h(x) = \frac{1}{(\sqrt{x}-1)^{p-1}}$.

$$\lim_{x\to 1+} \frac{\frac{(\sqrt{x}+1)}{(\sqrt{x})^p(\sqrt{x}-1)^{p-1}}}{\frac{1}{(\sqrt{x}-1)^{p-1}}} = 2$$

Poslední integrál upravíme substitucí $y = \sqrt{x},\ \mathrm{d}y = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{x}}$.

$$\int_1^2 \frac{1}{(\sqrt{x}-1)^{p-1}}\,\mathrm{d}x = \int_1^{\sqrt{2}} \frac{2y}{(y-1)^{p-1}}\,\mathrm{d}y$$

Poslední integrál konverguje právě pro $p-1<1$ (srovnáme s $(y-1)^{1-p}$).
Závěr: $\int_1^2 f(x)$ konverguje právě pro $p<2$.

(f) $\displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{\arcsin(x^2+x^3)}{x\ln^2(1+x)}\,\mathrm{d}x$

Řešení: U 0 srovnáme s $g(x) = \frac{x^2+x^3}{x\cdot x^2}$.

$$\lim_{x\to 0+} \frac{\frac{\arcsin(x^2+x^3)}{x\ln^2(1+x)}}{\frac{x^2+x^3}{x\cdot x^2}} = 1.$$

Dále máme

$$\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{x^2+x^3}{x^3}\,\mathrm{d}x = \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{x}+1\,\mathrm{d}x = \infty$$

Z LSK tedy plyne, že i $\int_0^{\frac{1}{2}} f(x)$ diverguje.