



## 23. cvičení – Vzorová písemka

<https://www2.karlin.mff.cuni.cz/~kuncova/vyuka.php>, kuncova@karlin.mff.cuni.cz  
120 minut, 4x15 bodů

1. Spočítejte limitu posloupnosti

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n \left( \left( 1 + \frac{1}{n} \right)^n - e \right).$$

2. Uvažujte funkci

$$f(x) = \begin{cases} (\sin x) \cdot \arctan\left(\frac{1}{\sin x}\right), & x \in \mathbb{R} \setminus \{k\pi : k \in \mathbb{Z}\}, \\ 0, & x \in \{k\pi : k \in \mathbb{Z}\}. \end{cases}$$

Spočítejte první derivaci i jednostranné první derivace funkce  $f$  ve všech bodech, kde existují. Určete body, kde tyto derivace neexistují.

3. Spočítejte limitu funkce

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2\sqrt{1+x} - 3\sqrt[3]{1+x} + \cos x}{x^2}.$$

4. Uvažujte funkci  $f$  definovanou předpisem

$$f(x) = \begin{cases} \exp\left(-\frac{1}{\sin^2 x}\right), & x \in \mathbb{R} \setminus \{k\pi : k \in \mathbb{Z}\}, \\ 0, & x \in \{k\pi : k \in \mathbb{Z}\}. \end{cases}$$

- (a) Vyšetřete, pro která  $x \in \mathbb{R}$  je hodnota  $f(x)$  dobře definovaná (tuto množinu budeme značit symbolem  $D(f)$ ),
- (b) určete, ve kterých bodech  $x \in D(f)$  je  $f$  spojitá, případně jednostranně spojitá,
- (c) určete limity  $f$  v krajních bodech definičního oboru,
- (d) určete, ve kterých bodech  $x \in D(f)$  existuje  $f'(x)$ , případně jednostranné derivace, a určete jejich hodnotu,
- (e) určete intervaly a typ monotonie funkce  $f$ ,
- (f) nalezněte všechny lokální a globální extrémy funkce  $f$ ,
- (g) určete obor hodnot funkce  $f$ ,
- (h) určete, ve kterých bodech  $x \in D(f)$  existuje  $f''(x)$  a určete její hodnotu,
- (i) určete intervaly konvexity a konkávnosti funkce  $f$ ,
- (j) nalezněte všechny inflexní body funkce  $f$ ,
- (k) rozhodněte, zda funkce  $f$  má asymptotu v  $\infty$  a/nebo v  $-\infty$  a pokud ano, určete ji,
- (l) načrtněte graf funkce  $f$ .