



22. cvičení – Průběh funkce

<https://www2.karlin.mff.cuni.cz/~kuncova/vyuka.php>, kuncova@karlin.mff.cuni.cz

1. ✱ Uvažujte funkci $f : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ zadanou předpisem

$$\begin{cases} \frac{x^2 \log x}{e^{2x}}, & x \in (0, \infty), \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

- (a) Rozhodněte, zda je funkce spojitá na $[0, \infty)$.
- (b) Rozhodněte, zda existuje $f'_+(0)$, a pokud ano, spočtěte ji.
- (c) Rozhodněte, zda má funkce f asymptotu v ∞ , a pokud ano, určete ji.
- (d) ✂ Rozhodněte, zda existuje $a \in (0, \infty)$ takové, že funkce f je monotónní na intervalu (a, ∞) .
- (e) ✱ Rozhodněte, zda existuje $b \in (0, \infty)$ takové, že funkce f je konkávní na intervalu $(0, b)$.

2. Uvažujte funkci f definovanou předpisem

$$\begin{cases} \arcsin\left(\frac{2 \log x}{1 + \log^2 x}\right), & x \in (0, \infty) \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

- (a) Ukažte, že je funkce f dobře definovaná.
- (b) Rozhodněte, ve kterých bodech $x \in [0, \infty)$ existují jednostranné derivace funkce f a pro tyto body je spočtěte.
- (c) Určete intervaly monotonie funkce f .
- (d) Určete obraz množiny $[0, e]$ při zobrazení f .
- (e) Určete intervaly konvexity a konkavity funkce f .

3. Uvažujte funkci $f(x) = \sqrt{|\sin x|} \cos\left(\frac{x}{2}\right)$.

- (a) Nalezněte body maxima a minima funkce f , pokud existují.
- (b) Určete obor hodnot funkce f .
- (c) ✂ Existuje otevřený interval I obsahující bod $\frac{\pi}{2}$, na kterém je funkce f konvexní?

4. Uvažujte funkci f zadanou předpisem

$$\begin{cases} (x^2)^{\sin x}, & x \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \\ 1, & x = 0. \end{cases}$$

- (a) Najděte intervaly, kde je funkce f spojitá.
- (b) Spočtěte $f'(0)$, pokud existuje.
- (c) ✱ Rozhodněte, zda existuje $\delta > 0$ takové, že funkce f je rostoucí na intervalu $(-\delta, \delta)$.
- (d) ✂ Rozhodněte, zda existuje $\xi > 0$ takové, že funkce f je monotónní na intervalu (ξ, ∞) .

Bonus

5. Necht

$$f(x) = \begin{cases} x + x^2 \sin \frac{1}{x^2}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

Ukažte, že f je rostoucí v bodě 0, ale není monotónní na žádném intervalu $(-\delta, \delta)$.

(1) Na některé lim možno opakovaně užit LH	(4c) Spočítejte $\lim_{x \rightarrow 0^+} f'$
(1d) Spočítejte $\lim_{x \rightarrow \infty} f'$	(4d) Testujte $f'(2k\pi)$ a $f'(\pi + 2k\pi)$
(1e) Spočítejte $\lim_{x \rightarrow 0^+} f''$	
(3c) Kolik je $f''(\pi/2)$?	