



20. cvičení – L'Hospital + Heine

<https://www2.karlin.mff.cuni.cz/~kuncova/vyuka.php>, kuncova@karlin.mff.cuni.cz

Teorie

Věta 1 (l'Hospitalovo pravidlo). Nechť $a \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$, f, g jsou reálné funkce a existuje $\lim_{x \rightarrow a+} \frac{f(x)}{g(x)}$. Jestliže navíc platí jedna z následujících podmínek

(a) $\lim_{x \rightarrow a+} f(x) = \lim_{x \rightarrow a+} g(x) = 0$, nebo

(b) $\lim_{x \rightarrow a+} |g(x)| = \infty$,

potom

$$\lim_{x \rightarrow a+} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a+} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Věta 2 (Heineova). Nechť $a \in \mathbb{R}^*$, $A \in \mathbb{R}^*$ a nechť funkce $f : M \rightarrow \mathbb{R}$, $M \subset \mathbb{R}$, je definována na nějakém prstencovém okolí bodu a . Potom jsou následující dva výroky ekvivalentní:

(i)

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = A;$$

(ii) Pro každou posloupnost $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$, splňující $x_n \in M$, $\forall n \in \mathbb{N} : x_n \neq a$ a $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$ platí $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = A$.

Příklady

1. Spočítejte limity. Nezapomeňte na Heineho a na fakt, že ne vždy L'Hospital pomůže.

(a) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^{60} + 3x - 4}{x^{40} - 2x + 1}$

(b) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{\pi}{2} - \arccos x}{x}$

(c) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x - x}{x - \sin x}$

(d) $\heartsuit \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\tan \frac{1}{n} - \frac{1}{n}}{\frac{1}{n} - \sin \frac{1}{n}}$

(e) $\lim_{x \rightarrow 0+} x^x$

(f) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin 2x - 2 \arcsin x}{x^3}$

(g) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x \sin x} - \frac{1}{x^2}$

(h) $\lim_{n \rightarrow \infty} (-1)^n \frac{\ln^2(n+1)}{(n-1)^2}$

(i) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \cotg x - 1}{x^2}$

(j) $\heartsuit \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}}$

(k) $\lim_{x \rightarrow 1-} \ln x \cdot \ln(1-x)$

(l) $\heartsuit \lim_{n \rightarrow \infty} \cos(n\pi) \frac{n^k}{e^{an}}$, $k \in \mathbb{N}$, $a > 0$.

(m) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} - \frac{1}{\ln(1+x)}$

(n) $\lim_{x \rightarrow 0+} \frac{1}{x\sqrt{x}} \left(\sqrt{a} \arctan \sqrt{\frac{x}{a}} - \sqrt{b} \arctan \sqrt{\frac{x}{b}} \right)$, $a, b > 0$

2. Rozhodněte, zda je funkce $f(x) = \frac{x \cos 2x \sin 3x}{x^2 - \pi^2}$, $f(\pi) = -\frac{1}{2}$, spojitá v π .

Bonus

3. Spočtete limity

(a) $\lim_{x \rightarrow 0^+} (\cotg x)^{\sin x}$

(b) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\operatorname{tg} \frac{\pi x}{2x+1} \right)^{\frac{1}{x}}$

(c) $\lim_{x \rightarrow 0} \cotg x - \frac{1}{x}$

(d) $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{(1+x)^{\frac{1}{x}}}{e} \right)^{\frac{1}{x}}$

(e) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{c^n}{n}, c > 1.$

(f) $\lim_{n \rightarrow \infty} (\ln n)^{\frac{1}{n}}$

Zkouškové příklady

4. Spočtete limity

(a) $\lim_{n \rightarrow \infty} n^8 \left(2 \cos \frac{1}{n^2} - 2 + \frac{1}{n^4} \right)$

(b) $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sqrt{e^x - \sin x} - \sqrt{1 + \frac{x^2}{2}}}{\arcsin x - \sin x}$

(c) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{\cos \frac{3}{n}}{\cos \frac{5}{n}} \right)^{n^2}$

(d) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\cos \arctan \sqrt{n}}{\sin \operatorname{arccot} \sqrt{n}}$

(e) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \ln \left(1 + \frac{1}{n} \right) \right)^{\sqrt{n^2+1}}$

Bonus

5. Sestrojte funkce f, g rostoucí a spojitě na \mathbb{R} takové, že $x^2 = f(x) - g(x)$ pro všechna $x \in \mathbb{R}$.

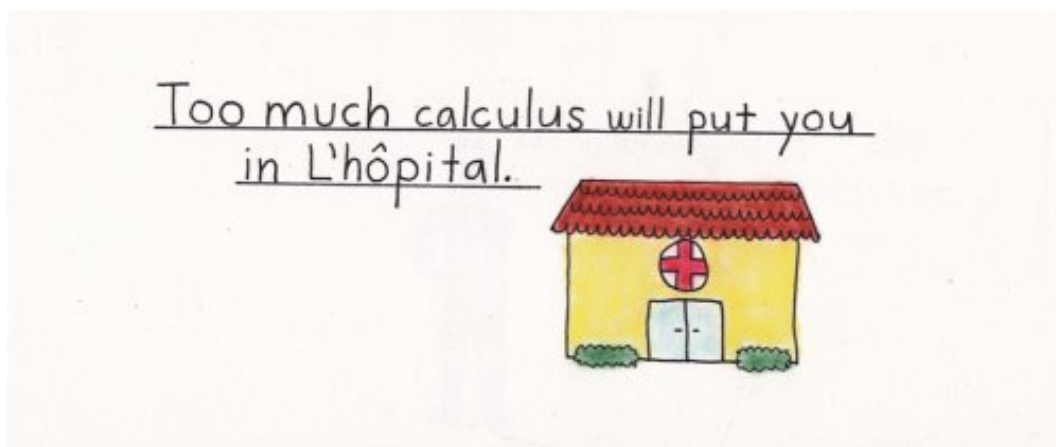


Figure 1: <https://twitter.com/everydaycalc/status/722795700795277314>

(1d) Použijte l'Hospitala pro $1/n = x \rightarrow 0+$	(1f) Hospitala nefunguje, vyzkoušejte x
(1e) Schovejte si kosinus a pak použijte k -krát	(1g) Zderivujte. Platí $f' > 0 < \implies f$ je rostoucí