18. cvičení – Derivace

https://www2.karlin.mff.cuni.cz/~kuncova/vyuka.php, kuncova@karlin.mff.cuni.cz

Teorie

Definice 1. Nechť f je reálná funkce a $a \in \mathbb{R}$. Jestliže existuje

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h},$$

pak tuto limitu nazýváme *derivací* funkce f v bodě a. Značíme $f'(a)$.

Věta 2 (Aritmetika derivací)**.** Nechť $a \in \mathbb{R}$ a nechť f a g jsou funkce definované na nějakém okolí bodu a. Nechť existují $f'(a) \in \mathbb{R}^*$ a $g'(a) \in \mathbb{R}^*$.

(a) Platí

$$(f \pm g)'(a) = f'(a) \pm g'(a),$$

(b) Je-li alespoň jedna z funkcí f, g spojitá v bodě a, pak

$$(fg)'(a) = f'(a)g(a) + f(a)g'(a),$$

(c) Je-li funkce g spojitá v bodě a a navíc $g(a) \neq 0$, pak

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(a) = \frac{f'(a)g(a) - f(a)g'(a)}{g(a)^2},$$

vždy je-li výraz na pravé straně definován.

Věta 3 (O derivaci složené funkce)**.** Nechť f má derivaci v bodě $y_0 \in \mathbb{R}$, g má derivaci v bodě $x_0 \in \mathbb{R}$, $y_0 = g(x_0)$ a g je v bodě x_0 spojitá. Potom

$$(f \circ g)'(x_0) = f'(y_0)g'(x_0) = f'(g(x_0))\, g'(x_0),$$

je-li výraz na pravé straně definován.

Věta 4. Nechť reálná funkce f je spojitá zprava v bodě $a \in \mathbb{R}$ a existuje $\lim_{x\to a_+} f'(x)$. Pak existuje $f'_+(a)$ a platí $f'_+(a) = \lim\limits_{x\to a_+} f'(x)$. Levá strana analogicky.

Hinty

$$a^b = e^{b \ln a} \qquad x^{-a} = \frac{1}{x^a} \qquad \sqrt[b]{x^a} = x^{a/b}$$

Příklady

Spočtěte derivace následujících funkcí, určete definiční obory funkcí i jejich derivací

1. (a) $6x$
   (b) $x^3 + 2x - \sin x + 2$
   (c) $-2\cos x + 4e^x + \frac{1}{3}x^7$
   (d) $\sqrt{x} + \frac{2}{\sqrt{x}}$
   (e) $\sqrt[3]{x} - \sqrt[4]{x^7}$
   (f) $\frac{1}{x} + \frac{2}{x^2} + \frac{3}{x^3}$
   (g) $\ln x + \frac{\cos x}{\pi}$
   (h) $\cot x + \tan x$
   (i) $\arcsin x - 3\,\mathrm{arccot}\, x$
   (j) $2\arctan x + \arccos x$

2. (a) xe^x
   (b) $\dfrac{1+x-x^2}{1-x+x^2}$
   (c) $x^2e^x\sin x$
   (d) $\dfrac{3x-2}{x^2+1}$
   (e) $e^x(x^2-2x+2)$
   (f) $\dfrac{1}{\ln x}$

3. (a) $\operatorname{arccot} 2x$
   (b) $(3x^2-2x+10)^{10}$
   (c) $\sqrt{x}-\arctan\sqrt{x}$
   (d) $\ln^3 x^2$
   (e) $\sqrt{4-x^2}$
   (f) $\ln(\sin x)$
   (g) $\ln\ln(x-3)+\arcsin\dfrac{x-5}{2}$
   (h) x^x
   (i) $x^{(\sin x)}$
   (j) $\sin(\sin(\sin x))$
   (k) $\ln(\ln^2(\ln^3 x))$
   (l) $\dfrac{\sin^2 x}{\sin x^2}$
   (m) $2^{\tan\frac{1}{x}}$
   (n) $\dfrac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{arccot}\dfrac{\sqrt{2}}{x}$
   (o) $\dfrac{x^p(1-x)^q}{1+x}, \qquad p,q>0$

4. (a) $\ln\dfrac{x^2-1}{x^2+1}$
   (b) $\operatorname{arccot}\dfrac{2x}{x^2-1}$
   (c) $\sqrt{1+e^{\sqrt{3+x^2}}}$
   (d) $\dfrac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}$
   (e) $\sin(\arcsin x)$
   (f) $\ln(\ln x)+\ln(\ln 2)$

5. Vypočtěte derivace (i jednostranné) následujících funkcí

   (a) $f(x)=x\cdot|x|$
   (b)
   $$f(x)=\begin{cases}1-x, & x\in(-\infty,1)\\ (1-x)(2-x), & [1,2]\\ -(2-x), & (2,\infty)\end{cases}$$
   (c) $f(x)=|\ln|x||$

Bonus

6. Zderivujte funkci $f(x)=\lfloor x\rfloor\sin^2\pi x$.

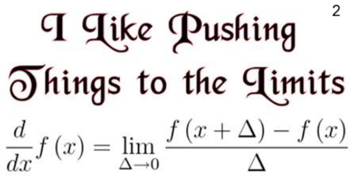

Figure 1: https://www.synchroerp.com/news/blog/limit-of-some-function