16. cvičení – limita složené funkce 2

https://www2.karlin.mff.cuni.cz/~kuncova/vyuka.php, kuncova@karlin.mff.cuni.cz

Příklady

1. Spočtěte limity zadaných funkcí

   (a) $\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+3x)}{x}$

   Řešení:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+3x)}{x} = \lim_{x\to 0} 3\frac{\ln(1+3x)}{3x} =$$

   VOLSF, podmínka P: $3x \neq 0$ na okolí 0.

   (b) $\lim_{x\to\infty} x \ln\left(1-\frac{3}{x}\right)$

   Řešení:

$$\lim_{x\to\infty} x \ln\left(1-\frac{3}{x}\right) = \lim_{x\to\infty} \frac{\ln\left(1-\frac{3}{x}\right)}{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to\infty} -3\frac{\ln\left(1-\frac{3}{x}\right)}{\frac{-3}{x}} = -3$$

   VOLSF, podmínka P: $-3/x \neq 0$ na okolí ∞.

   (c) $\lim_{x\to 1-} \frac{\sqrt{e^2-e^{2x}}}{\arccos x} = e$

   Řešení: Příklad máme odsud: https://reseneulohy.cz/cs/matematika/matematicka-analyza

   Převedeme na základní limitu pro $\arccos x$.

$$\lim_{x\to 1-} \frac{\sqrt{e^2-e^{2x}}}{\arccos x} = \lim_{x\to 1-} \frac{\sqrt{e^2-e^{2x}}}{\sqrt{1-x}} \cdot \frac{\sqrt{1-x}}{\arccos x}$$

   První limitu nyní převedeme na limitu pro e^x.

$$\lim_{x\to 1-} \frac{\sqrt{e^2-e^{2x}}}{\sqrt{1-x}} = \lim_{x\to 1-} \frac{\sqrt{e^{2x}(e^{2(1-x)}-1)}}{\sqrt{\frac{2(1-x)}{2}}} = \lim_{x\to 1-} e^x\sqrt{2}\sqrt{\frac{e^{2(1-x)}-1}{2(1-x)}} \overset{VOAL}{=} e^1 \cdot \sqrt{2} \cdot \sqrt{1}.$$

   Pro původní limitu pak máme

$$\lim_{x\to 1-} \frac{\sqrt{e^2-e^{2x}}}{\sqrt{1-x}} \cdot \frac{\sqrt{1-x}}{\arccos x} \overset{VOAL}{=} e \cdot \sqrt{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} = e.$$

   Odůvodnění:

$$\lim_{x\to 1-} \frac{e^{2(1-x)}-1}{2(1-x)} = 1.$$

   Vnější funkce $\frac{e^y-1}{y}$, vnitřní $2(1-x)$. Navíc $\lim_{x\to 1-} 2(1-x) = 0$ a $2(1-x)$ je monotónní na $\mathbb{R}$, tedy $2(1-x) \neq 0$ na $P(1,42)$.

   Potom

$$\lim_{x\to 1-} \sqrt{\frac{e^{2(1-x)}-1}{2(1-x)}} = \sqrt{1}.$$

   Vnější funkce $\sqrt{y}$, vnitřní $\frac{e^{2(1-x)}-1}{2(1-x)}$. Podmínka (S): $\sqrt{y}$ je spojitá v bodě 1.

(d) ♡ $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln(x^2-x+1)}{\ln(x^{10}+x+1)}$

Řešení:

Postupujeme vytknutím.

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(x^2-x+1)}{\ln(x^{10}+x+1)} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x^2(1-\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2})}{\ln x^{10}(1+\frac{1}{x^9}+\frac{1}{x^{10}})} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x^2+\ln(1-\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2})}{\ln x^{10}+\ln(1+\frac{1}{x^9}+\frac{1}{x^{10}})} =$$

Z vlastností logaritmu:

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{2\ln x+\ln(1-\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2})}{10\ln x+\ln(1+\frac{1}{x^9}+\frac{1}{x^{10}})} =$$

A konečně poslední vytknutí

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{2+\ln(1-\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2})/\ln x}{10+\ln(1+\frac{1}{x^9}+\frac{1}{x^{10}})/\ln x} = \frac{2+0}{10+0} = \frac{1}{5}.$$

Výpočet limity využívá věty o aritmetice limit a VOLSF (spojitost logaritmu)

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(1-\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2})}{\ln x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(1-\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2})}{1} \cdot \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{\ln x} = \ln(1-0+0)\cdot 0 = 0.$$

(e) ♡ $\lim\limits_{x\to0} \dfrac{\sqrt{1+x\sin x}-1}{e^{x^2}-1}$

Řešení:

Sledujte výpočet.

$$\lim_{x\to0} \frac{\sqrt{1+x\sin x}-1}{e^{x^2}-1} = \lim_{x\to0} \frac{(\sqrt{1+x\sin x}-1)/x^2}{(e^{x^2}-1)/x^2}$$

První zlomek jde do jedničky (VOLSF, podm. (P)).

Druhý zlomek řešíme rozšířením odmocniny.

$$\lim_{x\to0} \frac{\sqrt{1+x\sin x}-1}{x^2} = \lim_{x\to0} \frac{1+x\sin x-1}{x^2} \cdot \lim_{x\to0} \frac{1}{\sqrt{1+x\sin x}+1} =$$

$$= \lim_{x\to0} \frac{\sin x}{x} \cdot \lim_{x\to0} \frac{1}{\sqrt{1+x\sin x}+1} = 1\cdot\frac{1}{1+1} = \frac{1}{2}.$$

Dohromady z aritmetiky limit:

$$\lim_{x\to0} \frac{(\sqrt{1+x\sin x}-1)/x^2}{(e^{x^2}-1)/x^2} \overset{AL}{=} 1\cdot\frac{1}{2} = \frac{1}{2}.$$

(f) ♡ $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\ln(x^3-\arctan x)}{\ln(x^2+\arctan x)}$

Řešení:

Vytkneme dominantní člen

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\ln(x^3 - \arctan x)}{\ln(x^2 + \arctan x)} = \lim_{x\to\infty} \frac{\ln x^3 \left(1 - \frac{\arctan x}{x^3}\right)}{\ln x^2 \left(1 + \frac{\arctan x}{x^2}\right)} = \lim_{x\to\infty} \frac{3\ln x + \ln\left(1 - \frac{\arctan x}{x^3}\right)}{2\ln x + \ln\left(1 + \frac{\arctan x}{x^2}\right)}$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{3 + \frac{\ln\left(1-\frac{\arctan x}{x^3}\right)}{\ln x}}{2 + \frac{\ln\left(1+\frac{\arctan x}{x^2}\right)}{\ln x}} \overset{VOAL}{=} \frac{3+0}{2+0}$$

Použili jsme limity

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\arctan x}{x^3} = 0 = \lim_{x\to\infty} \frac{\arctan x}{x^2},$$

neb $\arctan x$ je omezená a $1/x^2$ $(1/x^3)$ mizející funkce.

Dále jsme použili spojitosti logaritmu (v 1) a opět součin omezené a mizející.

(g) $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{\sqrt{\ln(x^2+4) - \ln x^2}}{\operatorname{arccot} x}$

Řešení: Příklad máme odsud: https://reseneulohy.cz/cs/matematika/matematicka-analyza

Rozepíšeme dle vzorců pro logaritmus a půjčíme a vrátíme na známé limity:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt{\ln(x^2+4) - \ln x^2}}{\operatorname{arccot} x} = \lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt{\ln\left(\frac{x^2+4}{x^2}\right)}}{\operatorname{arccot} x} = \lim_{x\to\infty} \frac{x \cdot \sqrt{\ln\left(\frac{x^2+4}{x^2}\right)}}{x \cdot \operatorname{arccot} x}$$

$$= \lim_{x\to\infty} x \cdot \sqrt{\frac{4}{x^2}} \cdot \sqrt{\frac{\ln\left(1 + \frac{4}{x^2}\right)}{\frac{4}{x^2}}} \cdot \frac{1}{x \cdot \operatorname{arccot} x}$$

$$\overset{VOAL}{=} 2 \cdot 1 \cdot 1 = 2.$$

Odůvodnění:

Protože jsme na okolí nekonečna, máme $\sqrt{x^2} = |x| = x$. Tedy

$$\lim_{x\to\infty} x\sqrt{\frac{4}{x^2}} = \lim_{x\to\infty} \frac{x}{x} \cdot 2 = 2.$$

Dále

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\ln\left(1 + \frac{4}{x^2}\right)}{\frac{4}{x^2}} = 1.$$

Jde o VOLSF, podmínka (P): vnitřní funkce $\frac{4}{x^2} \neq 0$ na $P(\infty, 1)$.

Navíc

$$\lim_{x\to\infty} \sqrt{\frac{\ln\left(1 + \frac{4}{x^2}\right)}{\frac{4}{x^2}}} = 1,$$

VOLSF, vnější funkce $\sqrt{y}$ je spojitá v 1.

(h) ♡ $\lim\limits_{x\to+\infty} x\left[\ln(x+1) - \ln x\right] = 1$

Řešení: Užijeme pravidla, že rozdíl logaritmů je logaritmus podílu a spojitosti logaritmu.

$$\lim_{x\to+\infty} x[\ln(x+1) - \ln x] = \lim_{x\to+\infty} x \ln \frac{x+1}{x} = \lim_{x\to+\infty} \ln \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$$

Spočteme limitu vnitřní funkce
$$\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e.$$
Protože logaritmus je spojitý, tak z VOLSF máme
$$\lim_{x\to+\infty}\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = \ln e = 1.$$

(i) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+x^2)}{\ln(1-x^2)}$

Řešení:
$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x^2)}{\ln(1-x^2)} = \lim_{x\to 0} -\frac{\ln(1+x^2)}{x^2}\frac{-x^2}{\ln(1-x^2)} \overset{VOAL}{=} -1$$
Podmínka P pro $\pm x^2 \neq 0$ na okolí 0.

(j) $\lim\limits_{x\to\infty} x\ln\left(1-\dfrac{2}{x^2}\right)$

Řešení:
$$\lim_{x\to\infty} x\ln\left(1-\frac{2}{x^2}\right) = \lim_{x\to\infty}\frac{-2}{x}\frac{\ln\left(1-\frac{2}{x^2}\right)}{\frac{-2}{x^2}} \overset{VOAL}{=} 0\cdot 1 = 0$$
Podmínka P pro $-2/x^2 \neq 0$ na okolí ∞.

(k) ♡ $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln(2+e^{3x})}{\ln(3+e^{2x})}$

Řešení:

Vytkneme. Pak použijte větu o algebře limit a spojitost logaritmu.
$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln(2+e^{3x})}{\ln(3+e^{2x})} = \lim_{x\to+\infty}\frac{\ln e^{3x}+\ln(\frac{2}{e^{3x}}+1)}{\ln e^{2x}+\ln(\frac{3}{e^{2x}}+1)} =$$
$$= \lim_{x\to+\infty}\frac{3x+\ln(\frac{2}{e^{3x}}+1)}{2x+\ln(\frac{3}{e^{2x}}+1)} = \lim_{x\to+\infty}\frac{3+\ln(\frac{2}{e^{3x}}+1)/x}{2+\ln(\frac{3}{e^{2x}}+1)/x} = \frac{3+0}{2+0} = \frac{3}{2}.$$

(l) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{x\sin x}}{e^{x^2}-1}$

Řešení:
$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{x\sin x}}{e^{x^2}-1} = \lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{x\sin x}/x^2}{(e^{x^2}-1)/x^2} = \lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{x\sin x}}{x^2} =$$
Protože $x\sin x$ je kladný výraz na okolí nuly, též tak x^2, můžeme doplnit absolutní hodnoty.
$$= \lim_{x\to 0}\frac{|x\sin x|^{1/2}}{x^2} = \lim_{x\to 0}\frac{|\sin x|^{1/2}}{|x|^{3/2}} = \lim_{x\to 0}\frac{|\sin x|^{1/2}}{|x|^{1/2}}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{1}{|x|}$$
$$= \lim_{x\to 0}\sqrt{\frac{\sin x}{x}}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{1}{|x|} = 1\cdot +\infty = +\infty.$$

(m) ♡ $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{a^x - 1}{x}$, kde $a > 0$.

Řešení:

Substituujme $y = x + 1$ a posléze $y = e^z$. Pak máme

$$\lim_{y\to 1} \frac{\ln y}{y-1} = 1 \implies \lim_{z\to 0} \frac{z}{e^z - 1} = 1 \implies \lim_{z\to 0} \frac{e^z - 1}{z} = 1.$$

Tím jsme spočítali příklad pro speciální případ, kdy a je rovno Eulerovu číslu e.

Nyní spočteme limitu pro obecné $a > 0$. V závěru substituujeme $y = x \ln a$.

$$\lim_{x\to 0} \frac{a^x - 1}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{e^{x\ln a} - 1}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{e^{x\ln a} - 1}{x \ln a} \cdot \ln a = \lim_{y\to 0} \frac{e^y - 1}{y} \cdot \ln a = \ln a.$$

(n) ♡ $\lim\limits_{x\to -\infty} \dfrac{\ln(1+3^x)}{\ln(1+2^x)}$

Řešení: Protože $3^x \to 0$, pokud $x \to -\infty$, vede k cíli nenápadné rozšíření.

$$\lim_{x\to -\infty} \frac{\ln(1+3^x)}{\ln(1+2^x)} = \frac{\lim\limits_{x\to -\infty} \frac{\ln(1+3^x)}{3^x}}{\lim\limits_{x\to -\infty} \frac{\ln(1+2^x)}{2^x}} \cdot \lim_{x\to -\infty} \frac{3^x}{2^x} =$$

Substituce $y = 3^x$ a $z = 2^x$ dává (v kombinaci s faktem, že $\frac{3}{2} > 1$), že $(\frac{3}{2})^x$ klesá v minus nekonečnu k nule

$$= \frac{\lim\limits_{y\to 0} \frac{\ln(1+y)}{y}}{\lim\limits_{z\to 0} \frac{\ln(1+z)}{z}} \cdot \lim_{x\to -\infty} \left(\frac{3}{2}\right)^x = \frac{1}{1} \cdot 0 = 0.$$

(o) ♡ $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{\ln(1+\sqrt{x}+\sqrt[3]{x})}{\ln(1+\sqrt[3]{x}+\sqrt[4]{x})}$

Řešení:

V čitateli vytkněte $\sqrt{x}$, dole $\sqrt[3]{x}$ (oba členy s nejvyšší mocninou u x).

$$\lim_{x\to +\infty} \frac{\ln(1+\sqrt{x}+\sqrt[3]{x})}{\ln(1+\sqrt[3]{x}+\sqrt[4]{x})} = \lim_{x\to +\infty} \frac{\ln\sqrt{x} + \ln(x^{-1/2} + 1 + x^{-1/6})}{\ln\sqrt[3]{x} + \ln(x^{-1/3} + 1 + x^{-1/12})} =$$

$$= \lim_{x\to +\infty} \frac{\frac{1}{2}\ln x + \ln(x^{-1/2} + 1 + x^{-1/6})}{\frac{1}{3}\ln x + \ln(x^{-1/3} + 1 + x^{-1/12})} =$$

$$\lim_{x\to +\infty} \frac{\frac{1}{2} + \ln(x^{-1/2} + 1 + x^{-1/6})/\ln x}{\frac{1}{3} + \ln(x^{-1/3} + 1 + x^{-1/12})/\ln x} = \frac{\frac{1}{2} + 0}{\frac{1}{3} + 0} = \frac{3}{2}.$$

(p) ♡ $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{\ln(1+3^x)}{\ln(1+2^x)}$

Řešení:

V čitateli i jmenovateli jsou dominantními členy exponenciály. Vytkneme je tedy.

$$\lim_{x\to +\infty} \frac{\ln(1+3^x)}{\ln(1+2^x)} = \lim_{x\to +\infty} \frac{\ln 3^x(3^{-x}+1)}{\ln 2^x(2^{-x}+1)} = \lim_{x\to +\infty} \frac{\ln 3^x + \ln(3^{-x}+1)}{\ln 2^x + \ln(2^{-x}+1)} =$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{x\ln 3 + \ln(3^{-x}+1)}{x\ln 2 + \ln(2^{-x}+1)} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\ln 3 + \ln(3^{-x}+1)/x}{\ln 2 + \ln(2^{-x}+1)/x} =$$

Věta o limitě podílu a o limitě součtu dává (s přihlédnutím k faktu, že $0/\infty = 0$)

$$= \frac{\ln 3 + \ln(0+1)/(+\infty)}{2 + \ln(0+1)/(+\infty)} = \frac{\ln 3}{\ln 2}.$$

Zkouškové příklady

2. Spočtěte limity zadaných funkcí

(a) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\cos(\sin x) - 1}{\log\sqrt{1+x^2}}$

Řešení:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\cos(\sin x)-1}{\log\sqrt{1+x^2}} = \lim_{x\to 0} \frac{\cos(\sin x)-1}{\sin^2 x} \cdot \frac{\sin^2 x}{x^2} \cdot \frac{x^2}{\sqrt{1+x^2}-1} \cdot \frac{\sqrt{1+x^2}-1}{\log\sqrt{1+x^2}}$$

$$\overset{VOAL}{=} -\frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 2 \cdot 1 = -1$$

Pro třetí výraz platí

$$\lim_{x\to 0} \frac{x^2}{\sqrt{1+x^2}-1} = \lim_{x\to 0} \frac{x^2(\sqrt{1+x^2}+1)}{1+x^2-1} = \lim_{x\to 0} \sqrt{1+x^2}+1 = 2$$

Pro VOLSF máme (ve zkratce) podmínky:
První vnitřní funkce $\sin x \neq 0$ na $P\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$. (Z grafu.)
Druhá vnitřní funkce $\sqrt{1+x^2} \neq 1$ na $P(0,1)$. Plyne z výpočtu $1 + x^2 \neq 1$ na $P(0,1)$.

(b) $\lim\limits_{x\to\infty} \sqrt{\log\left(1+\dfrac{3}{x}\right)} \left(\log(1+x^3)\right)^2$

Řešení:

$$\lim_{x\to\infty} \sqrt{\log\left(1+\frac{3}{x}\right)} \left(\log(1+x^3)\right)^2 = \lim_{x\to\infty} \sqrt{\frac{\log\left(1+\frac{3}{x}\right)}{\frac{3}{x}}} \cdot \sqrt{\frac{3}{x}} \cdot \left(\log(1+x^3)\right)^2$$

$$= \lim_{x\to\infty} \sqrt{\frac{\log\left(1+\frac{3}{x}\right)}{\frac{3}{x}}} \cdot \sqrt{3} \cdot \left(\frac{\log(1+x^3)}{\sqrt[4]{x}}\right)^2$$

$$\overset{VOAL}{=} 1 \cdot \sqrt{3} \cdot 0.$$

Platí

$$0 \leq \left(\frac{\log(1+x^3)}{\sqrt[4]{x}}\right)^2 \leq \left(\frac{\log(2x^3)}{\sqrt[4]{x}}\right)^2 = \left(\frac{\log 2 + \log(x^3)}{\sqrt[4]{x}}\right)^2$$

Pravá strana jde do 0 z aritmetiky limit a ze škály.
Dále máme

$$\lim_{x\to\infty} \sqrt{\frac{\log\left(1+\frac{3}{x}\right)}{\frac{3}{x}}} = \sqrt{1},$$

z dvojitého použití VOLSF. Podmínka (P): $\frac{3}{x} \neq 0$ na $P(\infty, 5)$.
Pak podmínka (S): $\sqrt{y}$ je spojitá v 1.

(c) $\lim\limits_{x\to 0+} \dfrac{(\sqrt{e})^{\sin x} - \cos(\sqrt{x})}{\log^2(1+\sqrt{x})}$

Řešení:

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0+} \frac{(\sqrt{e})^{\sin x} - \cos(\sqrt{x})}{\log^2(1+\sqrt{x})} &= \lim_{x\to 0+} \frac{e^{\frac{1}{2}\sin x} - 1}{\log^2(1+\sqrt{x})} + \frac{1-\cos(\sqrt{x})}{\log^2(1+\sqrt{x})} \\
&= \lim_{x\to 0+} \frac{e^{\frac{1}{2}\sin x} - 1}{\frac{1}{2}\sin x} \cdot \frac{\frac{1}{2}\sin x}{x} \cdot \frac{(\sqrt{x})^2}{\log^2(1+\sqrt{x})} + \frac{1-\cos(\sqrt{x})}{(\sqrt{x})^2} \cdot \frac{(\sqrt{x})^2}{\log^2(1+\sqrt{x})} \\
&\overset{VOAL}{=} 1 \cdot \frac{1}{2} \cdot 1 + \frac{1}{2} \cdot 1 = 1.
\end{aligned}$$

Podmínky pro VOLSF (telegraficky):
1) (P) $\frac{1}{2}\sin x \neq 0$ na $P^+(0, \frac{\pi}{2})$ (z grafu).
3,4,5) (P) $\sqrt{x} \neq 0$ na $P^+(0,3)$ (z grafu).

Bonus

3. Rozhodněte, zda platí

(FALSE) Nechť funkce $f(x)$ není shora omezená v žádném okolí $P(0,\delta)$. Pak $\lim_{x\to 0} f(x) = +\infty$.
Řešení: Uvažujme funkci

$$f(x) = \begin{cases} 1/x, & x \in \mathbb{Q}, \\ 0, & x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}. \end{cases}$$

Pak $\lim_{x\to 0} f(x)$ neexistuje, ale $f(x)$ je neomezená.

(TRUE) Nechť $\lim_{x\to 0} f(x) = +\infty$. Pak existuje okolí $P(0,\delta)$ takové, že funkce f je zdola omezená na $P(0,\delta)$.
Řešení: Jde o analogii věty o limitě a omezenosti.
Zvolme $\varepsilon = 1$. Pak existuje $\delta > 0$ tak, že pro $\forall x \in P(0,\delta)$ platí $f(x) \in B(\infty, 1) = (1, \infty)$.
Neboli $f(x) > 1$ na $P(0,\delta)$.

4. Nechť $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ jsou funkce. Ukažte, že

$$\begin{aligned}
\max\{f(x), g(x)\} &= \frac{f(x) + g(x) + |f(x) - g(x)|}{2}, \\
\min\{f(x), g(x)\} &= \frac{f(x) + g(x) - |f(x) - g(x)|}{2}.
\end{aligned}$$

Řešení:

Rozborem případů. Nechť $f(x) \geq g(x)$. Pak $f(x)-g(x) \geq 0$ a $|f(x)-g(x)| = f(x)-g(x)$. Dostáváme tedy

$$\frac{f(x)+g(x)+|f(x)-g(x)|}{2} = \frac{f(x)+g(x)+f(x)-g(x)}{2} = \frac{2f(x)}{2} = f(x) = \max\{f(x), g(x)\}$$

Analogicky

$$\frac{f(x)+g(x)-|f(x)-g(x)|}{2} = \frac{f(x)+g(x)-f(x)+g(x)}{2} = \frac{2g(x)}{2} = g(x) = \min\{f(x), g(x)\}$$

Pro $f(x) \leq g(x)$ máme $f(x)-g(x) \leq 0$ a $|f(x)-g(x)| = -f(x)+g(x)$ a tedy

$$\frac{f(x)+g(x)+|f(x)-g(x)|}{2} = \frac{f(x)+g(x)-f(x)+g(x)}{2} = \frac{2g(x)}{2} = g(x) = \max\{f(x), g(x)\}$$

Analogicky

$$\frac{f(x)+g(x)-|f(x)-g(x)|}{2} = \frac{f(x)+g(x)+f(x)-g(x)}{2} = \frac{2f(x)}{2} = f(x) = \min\{f(x), g(x)\}.$$