



15. cvičení – limita složené funkce

<https://www2.karlin.mff.cuni.cz/~kuncova/vyuka.php>, kuncova@karlin.mff.cuni.cz

Příklady

1. Spočítejte limity zadaných funkcí

(a) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 5x}{x}$

Řešení:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 5x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} 5 \frac{\sin 5x}{5x} = 5 \cdot 1 = 5.$$

VOLSF: Vnitřní funkce $g(x) = 5x$, $\lim_{x \rightarrow 0} 5x = 0$. Vnější funkce $f(y) = \sin y/y$, $\lim_{y \rightarrow 0} f(y) = 1$.

Podmínka (P): $5x \neq 0$ na $P(0, 10)$.

(b) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x^2}{x^2}$

Řešení:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x^2}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} 3 \frac{\sin 3x^2}{3x^2} \stackrel{VOAL}{=} 3 \cdot 1 = 3$$

VOLSF, podmínka (P) a fakt, že $\lim_{x \rightarrow 0} 3x^2 = 0$.

(c) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} x}{x}$

Řešení:

Počítejme.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} \cdot \frac{1}{\cos x} = 1 \cdot \frac{1}{1} = 1.$$

(d) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^4}{1 - \cos 4x^2}$

Řešení:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^4}{1 - \cos 4x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{16} \cdot \frac{(4x^2)^2}{1 - \cos 4x^2} \stackrel{VOAL}{=} \frac{1}{16} \cdot 2 = \frac{1}{8}.$$

VOLSF, podmínka (P) a fakt, že $\lim_{x \rightarrow 0} 2x^2 = 0$.

(e) $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\operatorname{tg} \sqrt{x}}{\sqrt{2x}}$

Řešení:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\operatorname{tg} \sqrt{x}}{\sqrt{2x}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{\operatorname{tg} \sqrt{x}}{\sqrt{x}} \stackrel{VOAL}{=} \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

VOLSF, podmínka (P) a $\sqrt{x} \rightarrow 0^+$ pro $x \rightarrow 0^+$.

(f) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1 - \cos x^2}}{1 - \cos x}$

Řešení:

Počítejme

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1 - \cos x^2}}{1 - \cos x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1 - \cos x^2}}{1 - \cos x} \frac{x^2}{\sqrt{x^4}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{1 - \cos x} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \sqrt{\frac{1 - \cos x^2}{x^4}} = 2 \frac{1}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}$$

VOLSF, $x^2 \rightarrow 0$ pro $x \rightarrow 0$, (P).

VOLSF, vnější funkce $\sqrt{y} \rightarrow 1/\sqrt{2}$ pro $y \rightarrow 1/2$, podmínka (S).

(g) $\lim_{x \rightarrow \infty} \arcsin \frac{1-x}{1+x}$

Řešení: $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1-x}{1+x} = -1$, konkrétně $-1+$ (jdeme do $-1+$ zprava). Z VOLSF, spojitost \arcsin v $-1+$, pak máme

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \arcsin \frac{1-x}{1+x} = -\frac{\pi}{2},$$

neb $\arcsin -1 = \frac{\pi}{2}$.

(h) $\lim_{x \rightarrow 0} \ln \left(\frac{x}{\sin x} \right)$

Řešení:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\sin x} = 1$$

pak VOLSF, spojitost logaritmu v 1 dává

$$\lim_{x \rightarrow 0} \ln \left(\frac{x}{\sin x} \right) = 0,$$

neboť $\lim_{x \rightarrow 1} \ln x = 0$.

(i) $\lim_{x \rightarrow \infty} \arccos(\sqrt{x^2 + x} - x)$

Řešení: Prve upravme odmocniny

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x^2 + x} - x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{\sqrt{x^2 + x} + x} = \frac{1}{2}$$

Z VOLSF a spojitosti \arccos v bodě $\frac{1}{2}$ máme

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \arccos(\sqrt{x^2 + x} - x) = \arccos \frac{1}{2} = \frac{\pi}{3}.$$

(j) $\lim_{x \rightarrow 0} x \cotg 3x$

Řešení: Počítejme.

$$\lim_{x \rightarrow 0} x \cotg 3x = \lim_{x \rightarrow 0} x \frac{\cos 3x}{\sin 3x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3x}{\sin 3x} \cdot \frac{\cos 3x}{3} = 1 \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{3}.$$

VOLSF, $3x \rightarrow 0$ pro $x \rightarrow 0$, (P).

(k) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sin x}{x}$

Řešení: Všimneme si, že počítáme limitu v ∞ .

Protože $-1 \leq \sin x \leq 1$ pro libovolné $x \in \mathbb{R}$, platí:

$$0 \xleftarrow{x \rightarrow \infty} -\frac{1}{x} \leq \frac{\sin x}{x} \leq \frac{1}{x} \xrightarrow{x \rightarrow \infty} 0,$$

a tedy musí být podle věty o srovnání (=2 policajti).

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sin x}{x} = 0.$$

$$(l) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} x - \sin x}{\sin^3 x}$$

Řešení:

Počítejme.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} x - \sin x}{\sin^3 x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - \sin x \cos x}{\sin^3 x \cos x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{\sin^2 x \cos x} =$$

Nyní vhodně rozšíříme

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1 - \cos x}{x^2}}{\frac{\sin^2 x}{x^2}} \cdot \frac{1}{\cos x} = \frac{\frac{1}{2}}{1^2} \cdot \frac{1}{1} = \frac{1}{2}.$$

$$(m) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 5x - \sin 3x}{\sin x}$$

Řešení:

Zlomek roztrhneme na dva a vhodně rozšíříme.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 5x - \sin 3x}{\sin x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 5x}{\sin x} - \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x}{\sin x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{\sin 5x}{5x} \cdot 5}{\frac{\sin x}{x} \cdot 1} - \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{\sin 3x}{3x} \cdot 3}{\frac{\sin x}{x} \cdot 1} = \frac{1}{1} \cdot 5 - \frac{1}{1} \cdot 3 = 2.$$

VOLSF, vnitřní funkce $3x$ a $5x$, podmínka (P).

$$(n) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - \cos 3x}{x^2}$$

Řešení: Přičteme a odečteme „chytrou jedničku“, zlomek roztrhneme na dva a vhodně rozšíříme.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - \cos 3x}{x^2} &= \lim_{x \rightarrow 0} -\frac{1 - \cos x - (1 - \cos 3x)}{x^2} = -\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} + \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 3x}{x^2} = \\ &= -\frac{1}{2} + \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 3x}{(3x)^2} \cdot 9 = -\frac{1}{2} + \frac{9}{2} = 4. \end{aligned}$$

VOLSF, vnitřní funkce $3x$, podmínka (P).

$$(o) \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \operatorname{tg} 2x \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{4} - x \right)$$

Řešení: Nejprve si výraz trochu zjednodušíme.

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \operatorname{tg} 2x \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{4} - x \right) = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\sin 2x}{\cos 2x} \cdot \frac{\sin \left(\frac{\pi}{4} - x \right)}{\cos \left(\frac{\pi}{4} - x \right)} = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\sin \left(\frac{\pi}{4} - x \right)}{\cos 2x} \cdot \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\sin 2x}{\cos \left(\frac{\pi}{4} - x \right)} =$$

Limity roztrhneme a vyřešíme zvlášť.

S přihlédnutím k faktu, že $\sin \frac{\pi}{2} = 1$ a $\cos 0 = 1$ dostaneme

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\sin 2x}{\cos \left(\frac{\pi}{4} - x \right)} = \frac{\sin 2 \cdot \frac{\pi}{4}}{\cos \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{4} \right)} = 1$$

Pro druhý zlomek použijeme substituci $y = \frac{\pi}{4} - x$.

$$\lim_{y \rightarrow 0} \frac{\sin y}{\cos 2 \left(\frac{\pi}{4} - y \right)} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{\sin y}{\cos \left(\frac{\pi}{2} - 2y \right)} =$$

Dále uijeme součtový vzorec $\cos(\alpha - \beta) = \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta$ na jmenovatel.

$$= \lim_{y \rightarrow 0} \frac{\sin y}{\cos \frac{\pi}{2} \cos 2y + \sin \frac{\pi}{2} \sin 2y} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{\sin y}{\sin 2y} =$$

Rozšíříme.

$$= \lim_{y \rightarrow 0} \frac{\frac{\sin y}{y}}{\frac{\sin 2y}{2y}} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2}.$$

Limitu před substitucí pak vyřešíme pomocí VOLSF.

$f(g(x)) = \frac{\sin(\frac{\pi}{4} - x)}{\cos 2x}$, $f(y) = \frac{\sin y}{\cos 2(\frac{\pi}{4} - y)}$, $g(x) = \frac{\pi}{4} - x$. Podmínka (P), tedy dohromady

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\sin(\frac{\pi}{4} - x)}{\cos 2x} = \frac{1}{2}.$$

Závěr: z aritmetiky limit je:

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \operatorname{tg} 2x \cdot \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} - x\right) = \frac{1}{2}$$

(p) $\lim_{x \rightarrow a} \frac{\sin x - \sin a}{x - a}$

Řešení: Počítejme.

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{\sin x - \sin a}{x - a} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{2 \sin \frac{x-a}{2} \cos \frac{x+a}{2}}{x - a} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{\sin \frac{x-a}{2}}{\frac{x-a}{2}} \cdot \lim_{x \rightarrow a} \cos \frac{x+a}{2} = 1 \cdot \cos \frac{a+a}{2} = \cos a.$$

(q) $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{6}} \frac{2 \sin^2 x + \sin x - 1}{2 \sin^2 x - 3 \sin x + 1}$

Řešení:

Trik je v použití metod na rozklad kvadratického trojčlenu (třeba počítáním kořenů kvadratické rovnice nebo uhadnutím). Zde platí

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{6}} \frac{2 \sin^2 x + \sin x - 1}{2 \sin^2 x - 3 \sin x + 1} &= \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{6}} \frac{(2 \sin x - 1)(\sin x + 1)}{(2 \sin x - 1)(\sin x - 1)} = \\ &= \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{6}} \frac{\sin x + 1}{\sin x - 1} = \frac{\frac{1}{2} + 1}{\frac{1}{2} - 1} = -3. \end{aligned}$$

(r) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1 + \operatorname{tg} x} - \sqrt{1 + \sin x}}{x^3}$

Řešení:

Počítejme. Nejprve se vypořádáme s odmocninami.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1 + \operatorname{tg} x} - \sqrt{1 + \sin x}}{x^3} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 + \operatorname{tg} x - 1 - \sin x}{x^3} \cdot \frac{1}{\sqrt{1 + \operatorname{tg} x} + \sqrt{1 + \sin x}}$$

Máme

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt{1 + \operatorname{tg} x} + \sqrt{1 + \sin x}} \stackrel{V_{OAL}}{=} \frac{1}{2}.$$

Pro druhou limitu pak platí

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} x - \sin x}{x^3} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{\sin x}{\cos x} - \sin x}{x^3} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - \sin x \cos x}{x^3 \cos x} \\ \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x(1 - \cos x)}{x^3 \cos x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} \frac{1 - \cos x}{x^2} \frac{1}{\cos x} = \cdot 1 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1} \stackrel{VOAL}{=} \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Celkem pro původní limitu dostaneme z VOAL $\frac{1}{4}$.

$$(s) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{\sqrt{1 + x \sin x} - \sqrt{\cos x}}$$

Řešení:

Počítejme. Nejprve se vypořádáme s odmocninami.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{\sqrt{1 + x \sin x} - \sqrt{\cos x}} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{1 + x \sin x - \cos x} \cdot \frac{\sqrt{1 + x \sin x} + \sqrt{\cos x}}{1} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{1 + x \sin x - \cos x} \cdot \frac{\sqrt{1 + x \sin x} + \sqrt{\cos x}}{1} \\ &= \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\frac{1 + x \sin x - \cos x}{x^2}} \cdot \frac{\sqrt{1 + x \sin x} + \sqrt{\cos x}}{1} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\frac{1 - \cos x}{x^2} + \frac{\sin x}{x}} \cdot \frac{\sqrt{1 + x \sin x} + \sqrt{\cos x}}{1} \\ &\stackrel{VOAL}{=} 2 \cdot \frac{1}{\frac{1}{2} + 1} = 2 \cdot \frac{1}{\frac{3}{2}} = \frac{4}{3}. \end{aligned}$$

$$(t) \lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\sin mx}{\sin nx}, \text{ kde } m, n \in \mathbb{N}$$

Řešení:

Substituujeme $y = x - \pi$. Jestliže $x \rightarrow \pi$, potom $y \rightarrow 0$, a tedy platí.

$$\lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\sin mx}{\sin nx} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{\sin m(y + \pi)}{\sin n(y + \pi)} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{\sin(my + m\pi)}{\sin(ny + n\pi)} =$$

Nyní použijeme součtový vzorec $\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \sin \beta \cos \alpha$ a přihlédneme k faktu, že $\cos m\pi = (-1)^m$ a $\sin m\pi = 0$ pro libovolné m přirozené.

$$= \lim_{y \rightarrow 0} \frac{\sin my \cos m\pi + \sin m\pi \cos my}{\sin ny \cos n\pi + \sin n\pi \cos ny} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{(-1)^m \sin my}{(-1)^n \sin ny} =$$

Nyní zrošíříme, použijeme větu o aritmetice limit a VOLSF:

$$= \lim_{y \rightarrow 0} \frac{(-1)^m \frac{\sin my}{my}}{(-1)^n \frac{\sin ny}{ny}} \cdot \frac{m}{n} = (-1)^{m-n} \frac{m}{n}.$$

$$(u) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\arctan x}{\operatorname{arccot} x}$$

Řešení: $\lim_{x \rightarrow \infty} \arctan = \frac{\pi}{2}$, $\lim_{x \rightarrow \infty} \operatorname{arccot} = 0+$. Pak

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\arctan x}{\operatorname{arccot} x} = \frac{\frac{\pi}{2}}{0+} = \infty.$$

Zkouškové příklady

2. Spočtete limity zadaných funkcí

$$(a) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(\tan x)}{\arctan(\arcsin x)}$$

Řešení:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(\tan x)}{\arctan(\arcsin x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(\tan x)}{\tan x} \cdot \frac{\tan x}{x} \cdot \frac{\arcsin x}{\arctan(\arcsin x)} \cdot \frac{x}{\arcsin x} \stackrel{VOAL}{=} 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1$$

VOLSF 1: $f(y) = \frac{\sin y}{y}$, $g(x) = \tan x$, (P) $\tan x \neq 0$ na $P(0, \frac{\pi}{4})$.

VOLSF 2: $f(y) = \frac{y}{\arctan y}$, $g(x) = \arcsin x$, (P) $\arcsin x \neq 0$ na $P(0, \frac{1}{4})$.

$$(b) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos(\arctan x)}{x^2}$$

Řešení:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos(\arctan x)}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos(\arctan x)}{(\arctan x)^2} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\arctan x)^2}{x^2} \stackrel{VOAL}{=} \frac{1}{2} \cdot 1^2 = \frac{1}{2}.$$

VOLSF: $f(y) = \frac{1 - \cos y}{y^2}$, $g(x) = \arctan x$, $\arctan x \neq 0$ na $P(0, \frac{1}{2})$.

$$(c) \lim_{x \rightarrow \infty} x^{5/2} \arcsin(\sqrt{x^5 + 1} - \sqrt{x^5 - 1})$$

Řešení: Nejprve rozšíříme argument arcsinu.

$$\sqrt{x^5 + 1} - \sqrt{x^5 - 1} = (\sqrt{x^5 + 1} - \sqrt{x^5 - 1}) \cdot \frac{(\sqrt{x^5 + 1} + \sqrt{x^5 - 1})}{(\sqrt{x^5 + 1} + \sqrt{x^5 - 1})} = \frac{2}{\sqrt{x^5 + 1} + \sqrt{x^5 - 1}}$$

Pak původní limita:

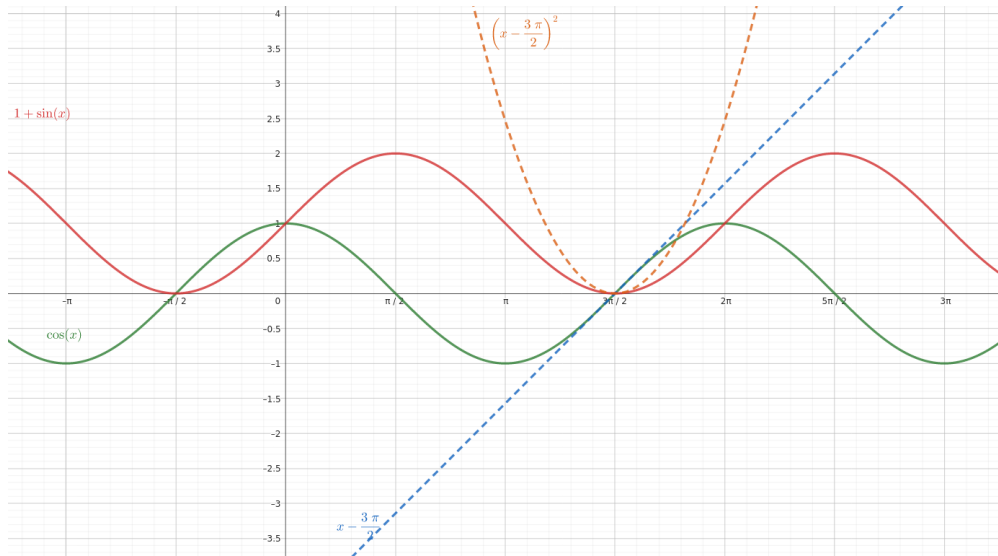
$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} x^{5/2} \arcsin\left(\frac{2}{\sqrt{x^5 + 1} + \sqrt{x^5 - 1}}\right) &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\arcsin\left(\frac{2}{\sqrt{x^5 + 1} + \sqrt{x^5 - 1}}\right)}{\frac{2}{\sqrt{x^5 + 1} + \sqrt{x^5 - 1}}} \cdot \frac{2x^{5/2}}{\sqrt{x^5 + 1} + \sqrt{x^5 - 1}} \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\arcsin\left(\frac{2}{\sqrt{x^5 + 1} + \sqrt{x^5 - 1}}\right)}{\frac{2}{\sqrt{x^5 + 1} + \sqrt{x^5 - 1}}} \cdot \frac{2}{\sqrt{1 + 1/x^5} + \sqrt{1 - 1/x^5}} \\ &\stackrel{VOAL}{=} 1 \cdot \frac{2}{2} = 1. \end{aligned}$$

$$(d) \lim_{x \rightarrow \frac{3\pi}{2}} (4x^2 - 9\pi^2) \frac{\cos x}{1 + \sin x}$$

Řešení:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \frac{3\pi}{2}} (4x^2 - 9\pi^2) \frac{\cos x}{1 + \sin x} &= \lim_{x \rightarrow \frac{3\pi}{2}} \frac{\cos x}{x - \frac{3\pi}{2}} \cdot \frac{(x - \frac{3\pi}{2})^2}{1 + \sin x} \cdot \frac{4x^2 - 9\pi^2}{x - \frac{3\pi}{2}} \\ &= \lim_{x \rightarrow \frac{3\pi}{2}} \frac{\cos x}{x - \frac{3\pi}{2}} \cdot \frac{(x - \frac{3\pi}{2})^2}{1 + \sin x} \cdot \frac{(2x - 3\pi)(2x + 2\pi)}{x - \frac{3\pi}{2}} \\ &\stackrel{VOAL}{=} 1 \cdot 2 \cdot 12\pi = 24\pi \end{aligned}$$

Limity plynou z obrázku a vlastností sin a cos.



$$(e) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\arctan(\sqrt{x^2 + \sin^2 x} - \sqrt{x^2 - \cos^2 x})}{\sqrt{x^2 + 2} - \sqrt{x^2 + 1}}$$

Řešení: Nejprve rozšíříme odmocniny.

$$\sqrt{x^2 + \sin^2 x} - \sqrt{x^2 - \cos^2 x} = \frac{1}{\sqrt{x^2 + \sin^2 x} + \sqrt{x^2 - \cos^2 x}}$$

$$\sqrt{x^2 + 2} - \sqrt{x^2 + 1} = \frac{1}{\sqrt{x^2 + 2} + \sqrt{x^2 + 1}}$$

Pak

$$\begin{aligned} & \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\arctan(\sqrt{x^2 + \sin^2 x} - \sqrt{x^2 - \cos^2 x})}{\sqrt{x^2 + 2} - \sqrt{x^2 + 1}} \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\arctan \frac{1}{\sqrt{x^2 + \sin^2 x} + \sqrt{x^2 - \cos^2 x}}}{\frac{1}{\sqrt{x^2 + \sin^2 x} + \sqrt{x^2 - \cos^2 x}}} \cdot \frac{\sqrt{x^2 + 2} + \sqrt{x^2 + 1}}{\sqrt{x^2 + \sin^2 x} + \sqrt{x^2 - \cos^2 x}} \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\arctan \frac{1}{\sqrt{x^2 + \sin^2 x} + \sqrt{x^2 - \cos^2 x}}}{\frac{1}{\sqrt{x^2 + \sin^2 x} + \sqrt{x^2 - \cos^2 x}}} \cdot \frac{\sqrt{x^2}}{\sqrt{x^2}} \cdot \frac{\sqrt{1 + 2/x^2} + \sqrt{1 + 1/x^2}}{\sqrt{1 + (\sin^2 x)/x^2} + \sqrt{1 - (\cos^2 x)/x^2}} \\ &\stackrel{VOL}{=} 1 \cdot \frac{2}{2} = 1. \end{aligned}$$

Jednotlivé limity:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sin^2 x}{x^2} = 0 \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\cos^2 x}{x^2} = 0$$

podle věty o omezené a mizející funkci.

$$\sqrt{1 + 2/x^2} \rightarrow 1, \quad \sqrt{1 + 1/x^2} \rightarrow 1, \quad \sqrt{1 + (\sin^2 x)/x^2} \rightarrow 1, \quad \sqrt{1 - (\cos^2 x)/x^2} \rightarrow 1.$$

VOLSF (S) vnější funkce \sqrt{y} je spojitá v 1.

VOLSF 2: vnější funkce $(\arctan y)/y$, vnitřní funkce $g(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2 + \sin^2 x} + \sqrt{x^2 - \cos^2 x}}$

Navíc $\lim_{x \rightarrow \infty} g(x) = 0$. Ze dvou polícajtů a odhadů

$$x^2 \leq x^2 + \sin^2 x, \quad x^2 - 1 \leq x^2 - \cos^2 x$$

máme

$$x^2 + \sin^2 x \rightarrow \infty, \quad x^2 - \cos^2 x \rightarrow \infty.$$

$x^2 + \sin^2 x \neq \infty$ i $x^2 - \cos^2 x \neq \infty$, tedy je splněna podmínka (P) pro limity

$$\sqrt{x^2 + \sin^2 x} \rightarrow \infty, \quad \sqrt{x^2 - \cos^2 x} \rightarrow \infty.$$

Dohromady z aritmetiky limit

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{x^2 + \sin^2 x} + \sqrt{x^2 - \cos^2 x}} = 0.$$

Navíc

$$\frac{1}{\sqrt{x^2 + \sin^2 x} + \sqrt{x^2 - \cos^2 x}} \neq 0,$$

tedy z podmínky (P)

$$\frac{\arctan \frac{1}{\sqrt{x^2 + \sin^2 x} + \sqrt{x^2 - \cos^2 x}}}{\frac{1}{\sqrt{x^2 + \sin^2 x} + \sqrt{x^2 - \cos^2 x}}} = 1.$$

Bonus

3. Existuje spojitá funkce taková, že $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$ neexistuje, ale $\lim_{n \rightarrow \infty} f(n)$ ano?

Řešení: Např. $f(x) = \sin(\pi x)$. Pak $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$ neexistuje, ale $\lim_{n \rightarrow \infty} f(n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sin(\pi n) = \lim_{n \rightarrow \infty} 0 = 0$.

4. Sestrojte funkci definovanou na celém \mathbb{R} , která ale má limitu pouze v 0 (v ostatních bodech limita neexistuje).

Řešení: $f(x) = xD(x)$, kde $D(x)$ je Dirichletova funkce.

5. Nechť $f : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ je bijekce. Rozhodněte, zda je pak f spojitá alespoň v jednom bodě.

Řešení: Nemusí být. Uvažujme funkci jako na obrázku, kde červená plná zobrazuje racionální body a žlutá čerchovaná iracionální.

