



15. cvičení – limita složené funkce

<https://www2.karlin.mff.cuni.cz/~kuncova/vyuka.php>, kuncova@karlin.mff.cuni.cz

Teorie

Věta 1 (O limitě složené funkce). Necht' $a \in \mathbb{R}^*$ a necht' funkce f a g splňují

$$\lim_{x \rightarrow a} g(x) = A \in \mathbb{R}^*, \quad \lim_{y \rightarrow A} f(y) = B \in \mathbb{R}^*.$$

Je-li navíc splněna alespoň jedna z podmínek

$$(S) \ f \text{ je spojitá v } A; \quad (P) \ \exists \delta > 0 \quad \forall x \in \mathcal{P}^\delta(a) : \quad g(x) \neq A;$$

pak $\lim_{x \rightarrow a} f(g(x)) = B$.

Fakta

$$\begin{array}{lll} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x}{x} = 1 & \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin x}{x} = 1 & \lim_{x \rightarrow \infty} x \operatorname{arccot} x = 1 \\ \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \frac{1}{2} & \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arctan x}{x} = 1 & \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{\arccos x}{\sqrt{1-x}} = \sqrt{2} \end{array}$$

Hinty

$$\begin{aligned} \sin(\alpha + \beta) &= \sin \alpha \cos \beta + \sin \beta \cos \alpha \\ \cos(\alpha - \beta) &= \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta \end{aligned}$$

Příklady

1. Spočtete limity zadaných funkcí

- | | |
|---|--|
| (a) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 5x}{x}$ | (h) $\lim_{x \rightarrow 0} \ln \left(\frac{x}{\sin x} \right)$ |
| (b) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x^2}{x^2}$ | (i) $\lim_{x \rightarrow \infty} \operatorname{arccos}(\sqrt{x^2 + x} - x)$ |
| (c) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} x}{x}$ | (j) $\lim_{x \rightarrow 0} x \operatorname{cotg} 3x$ |
| (d) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^4}{1 - \cos 4x^2}$ | (k) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sin x}{x}$ |
| (e) $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\operatorname{tg} \sqrt{x}}{\sqrt{2x}}$ | (l) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} x - \sin x}{\sin^3 x}$ |
| (f) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1 - \cos x^2}}{1 - \cos x}$ | (m) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 5x - \sin 3x}{\sin x}$ |
| (g) $\lim_{x \rightarrow \infty} \operatorname{arcsin} \frac{1-x}{1+x}$ | (n) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - \cos 3x}{x^2}$ |
| | (o) $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \operatorname{tg} 2x \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{4} - x \right)$ |

$$(p) \clubsuit \lim_{x \rightarrow a} \frac{\sin x - \sin a}{x - a}$$

$$(q) \clubsuit \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{6}} \frac{2 \sin^2 x + \sin x - 1}{2 \sin^2 x - 3 \sin x + 1}$$

$$(r) \heartsuit \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1 + \operatorname{tg} x} - \sqrt{1 + \sin x}}{x^3}$$

$$(s) \clubsuit \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{\sqrt{1 + x \sin x} - \sqrt{\cos x}}$$

$$(t) \lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\sin mx}{\sin nx}, \text{ kde } m, n \in \mathbb{N}$$

(Hint: použijte "substituci" $y = x - \pi$.)

$$(u) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\arctan x}{\operatorname{arccot} x}$$

Zkouškové příklady

2. Spočítejte limity zadaných funkcí

$$(a) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(\tan x)}{\arctan(\arcsin x)}$$

$$(b) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos(\arctan x)}{x^2}$$

$$(c) \lim_{x \rightarrow \infty} x^{5/2} \arcsin(\sqrt{x^5 + 1} - \sqrt{x^5 - 1})$$

$$(d) \lim_{x \rightarrow \frac{3\pi}{2}} (4x^2 - 9\pi^2) \frac{\cos x}{1 + \sin x}$$

$$(e) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\arctan(\sqrt{x^2 + \sin^2 x} - \sqrt{x^2 - \cos^2 x})}{\sqrt{x^2 + 2} - \sqrt{x^2 + 1}}$$

Bonus

3. Existuje spojitá funkce taková, že $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$ neexistuje, ale $\lim_{n \rightarrow \infty} f(n)$ ano?

4. \clubsuit Sestrojte funkci definovanou na celém \mathbb{R} , která ale má limitu pouze v 0 (v ostatních bodech limita neexistuje).

5. \clubsuit Necht' $f : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ je bijekce. Rozhodněte, zda je pak f spojitá alespoň v jednom bodě.

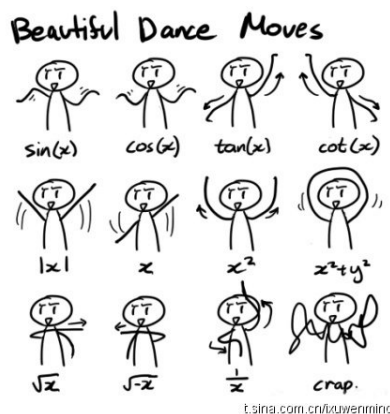


Figure 1: <https://www.quora.com/Whats-the-funniest-science-based-joke-you-know>

(1g) Zkontrolujte, zda jdeme do -1 zprava	(1q) lze rozložit na závorky
(1f) rozšířte odmocniny	(1r) rozšířte odmocniny
(1k) pozor, jsme v ∞	(1s) substituce $y = x - \pi$
(1l) rozepište tan x a převedte na společný jmenovatel	(4) $f = x = D(x)$, $D(x) \in \mathbb{Q}$, \mathbb{Q} , jinak 0.
(1o) součtové vzorce, pak substituce $y = \frac{x}{\pi} - x$	(5) definujte různé pro $x \in \mathbb{Q}$ a $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.
(1p) součtové vzorce	