https://www2.karlin.mff.cuni.cz/~kuncova/vyuka.php, kuncova@karlin.mff.cuni.cz

Příklady

1. Spočtěte limity

(a) $\lim_{x\to\infty} \frac{\sin x}{x}$

Řešení: Použijeme větu o dvou policajtech. Máme

$$-\frac{1}{x} \leq \frac{\sin x}{x} \leq \frac{1}{x}.$$

Protože $\lim_{x\to\infty} \pm\frac{1}{x} = 0$, tak i

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\sin x}{x} = 0.$$

(b) $\lim_{x\to\infty} e^{-x}\cos x$

Řešení: Použijeme větu o dvou policajtech. Máme

$$-e^{-x} \leq e^{-x}\cos x \leq e^{-x}.$$

Protože $\lim_{x\to\infty} \pm e^{-x} = 0$, tak i

$$\lim_{x\to\infty} e^{-x}\cos x = 0.$$

(c) $\lim_{x\to 0} x^3\sin(x^2)$

Řešení: Použijeme větu o dvou policajtech. Pro $x > 0$ máme

$$-x^3 \leq x^3\sin x^2 \leq x^3$$

Pro $x < 0$ máme

$$x^3 \leq x^3\sin x^2 \leq -x^3$$

Dohromady můžeme psát

$$0 \leq |x^3\sin x^2| \leq |x^3|$$

Protože $\lim_{x\to 0} |x^3| = 0$, tak i

$$\lim_{x\to 0} x^3\sin(x^2) = 0.$$

(d) $\lim_{x\to\infty} \frac{x+\sin x}{x-\sin x}$

Řešení: Vytkneme nejrychlejší člen:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x+\sin x}{x-\sin x} = \lim_{x\to\infty} \frac{1+\frac{\sin x}{x}}{1-\frac{\sin x}{x}} \overset{VOAL}{=} \frac{1+0}{1-0} = 1.$$

Limita $\lim_{x\to\infty} \sin x/x = 0$ podle prvního příkladu.

(e) $\lim\limits_{x\to 0+} x\cos\left(\dfrac{x+3}{\sqrt{x}-1}\right)$

Řešení: Použijeme větu o dvou policajtech. Máme

$$-x \leq x\cos\left(\frac{x+3}{\sqrt{x}-1}\right) \leq x$$

Protože $\lim_{x\to 0} \pm x = 0$, tak i

$$\lim_{x\to 0} x\cos\left(\frac{x+3}{\sqrt{x}-1}\right) = 0.$$

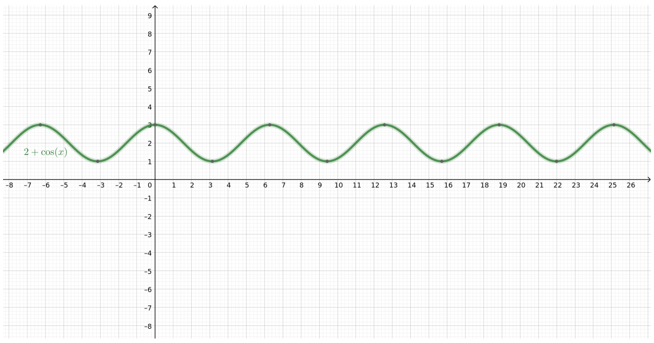
(f) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{e^x+e^{-x}}{e^x-e^{-x}}$

Řešení: Vytkneme nejrychlejší člen

$$\lim_{x\to\infty} \frac{e^x+e^{-x}}{e^x-e^{-x}} = \lim_{x\to\infty} \frac{1+e^{-2x}}{1-e^{-2x}} \overset{VOAL}{=} \frac{1+0}{1-0} = 1.$$

(g) $\lim\limits_{x\to\infty} (2+\cos x)$

Řešení: Limita neexistuje:



(h) $\lim\limits_{x\to\infty} x+\sin x$

Řešení: Z jednoho policajta

$$x-1 \leq x+\sin x$$

Navíc

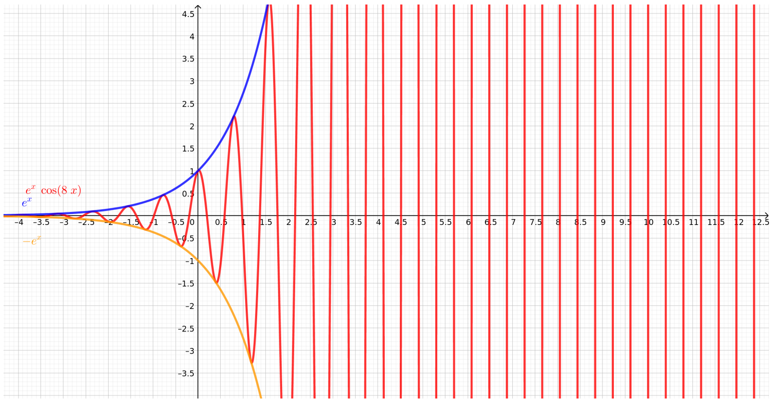
$$\lim_{x\to\infty} x-1 = \infty,$$

tedy i

$$\lim_{x\to\infty} x+\sin x = \infty.$$

(i) $\lim\limits_{x\to\infty} e^x\cos x$

Řešení: Limita neexistuje, z grafu (na obr. je kvůli názornosti funkce $e^x\cos(8x)$, ale myšlenka je stejná.)



(j) $\lim_{x \to 0} \frac{x^2}{e^x}$

Řešení:

$$\lim_{x \to 0} \frac{x^2}{e^x} \overset{VOAL}{=} \frac{0}{1} = 0.$$

(k) $\lim_{x \to \infty} \frac{x}{\sin x}$

Řešení: Limita neexistuje. Funkce $\frac{x}{\sin x}$ není definována v bodech $k\pi$. Což znamená, že pro dané ε nejsme schopni najít žádné δ-okolí bodu ∞, kde by funkce byla definovaná. Kvůli tomu ovšem nedokážeme ověřit definici limity.

2. Spočtěte limity

(a) $\lim_{x \to \infty} x^3 - x^2 + 3x - 8$

Řešení: Vytkneme

$$\lim_{x \to \infty} x^3 - x^2 + 3x - 8 = \lim_{x \to \infty} x^3 \left(1 - \frac{1}{x} + \frac{3}{x^2} - \frac{8}{x^3}\right) \overset{VOAL}{=} \infty(1 - 0 + 0 - 0) = \infty.$$

(b) $\lim_{x \to \infty} \frac{\sqrt{x^2+1}}{x}$

Řešení: Vytkneme

$$\lim_{x \to \infty} \frac{\sqrt{x^2+1}}{x} = \lim_{x \to \infty} \frac{x}{x} \cdot \frac{\sqrt{1 + \frac{1}{x^2}}}{1} \overset{VOAL}{=} \frac{1}{1} = 1$$

Limita $\lim_{x \to \infty} \sqrt{1 + \frac{1}{x^2}}$ se spočítá pomocí limity složené funkce. Vnitřní funkce je $g(x) = 1 + \frac{1}{x^2}$, vnější $f(y) = \sqrt{y}$. Pro limity platí

$$\lim_{x \to \infty} 1 + \frac{1}{x^2} = 1 + 0 = 1$$

a

$$\lim_{y \to 1} \sqrt{y} = \sqrt{1} = 1.$$

Platí podmínka (S): vnější funkce $f(y) = \sqrt{y}$ je spojitá v bodě 1.

(c) $\lim_{x\to\infty} \sqrt{x+2} - \sqrt{x}$

Řešení:

Rozšíříme

$$\lim_{x\to\infty} \sqrt{x+2} - \sqrt{x} \lim_{x\to\infty} \frac{x+2-x}{\sqrt{x+2}+\sqrt{x}} \overset{VOAL}{=} \frac{2}{\infty+\infty} = 0.$$

Platí, že $\lim_{x\to\infty} \sqrt{x+2} = \infty$ protože $g(x) = x+2$, $f(y) = \sqrt{y}$. Navíc $\lim_{x\to\infty} g(x) = \infty + 2 = \infty$ a $\lim_{y\to\infty} = \infty$. Platí podmínka (P), protože $x+2 \neq \infty$ na okolí $P(\infty, 1)$.

(d) $\lim_{x\to-\infty} \frac{\sqrt{x^2+1}}{x}$

Řešení: Vytkneme

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{\sqrt{x^2+1}}{x} = \lim_{x\to-\infty} \frac{|x|}{x} \cdot \frac{\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}{1} = \lim_{x\to-\infty} \frac{-x}{x} \cdot \frac{\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}{1} = \lim_{x\to-\infty} -1 \cdot \frac{\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}{1} = -1.$$

(e) $\lim_{x\to\infty} \sqrt{x+2} + \sqrt{x}$

Řešení:

$$\lim_{x\to\infty} \sqrt{x+2} + \sqrt{x} \overset{VOAL}{=} \infty + \infty$$

(f) $\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{x+1}-1}{x}$

Řešení: Rozšíříme

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{x+1}-1}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{x+1-1}{x(\sqrt{x+1}+1)} = \lim_{x\to 0} \frac{1}{(\sqrt{x+1}+1)} \overset{VOAL}{=} \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2}.$$

(g) $\lim_{x\to-2} \frac{\sqrt[3]{x-6}+2}{x^3+8}$

Řešení: Rozšíříme

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to-2} \frac{\sqrt[3]{x-6}+2}{x^3+8} &= \lim_{x\to-2} \frac{x-6+2^3}{(\sqrt[3]{(x-6)^2} - 2\sqrt[3]{x-6} + 2^2)(x^3+8)} \\
&= \lim_{x\to-2} \frac{x+2}{(\sqrt[3]{(x-6)^2} - 2\sqrt[3]{x-6} + 4)(x+2)(x^2-2x+4)} \\
&= \lim_{x\to-2} \frac{1}{(\sqrt[3]{(x-6)^2} - 2\sqrt[3]{x-6} + 4)(x^2-2x+4)} \\
&\overset{VOAL}{=} \frac{1}{(4+4+4)(4+4+4)} = \frac{1}{144}.
\end{aligned}$$

(h) $\lim_{x\to\infty} x(\sqrt{x^2+1} - x)$

Řešení: Rozšíříme

$$\lim_{x\to\infty} x(\sqrt{x^2+1} - x) = \lim_{x\to\infty} \frac{x}{\sqrt{x^2+1}+x} = \lim_{x\to\infty} \frac{x}{x} \cdot \frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}+1} \overset{VOAL}{=} \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2}.$$

Bonus

3. Spočtěte limity

(a) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}}{\sqrt{x+1}}$

Řešení:

Vytknutím dostaneme

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}}{\sqrt{x+1}} = \lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}} \frac{\sqrt{1+\sqrt{\frac{1}{x}+\sqrt{\frac{1}{x^3}}}}}{\sqrt{1+\frac{1}{x}}} = 1.$$

(b) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}+\sqrt[4]{x}}{\sqrt{2x+1}}$

Řešení:

Vytknutím dostaneme

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}+\sqrt[4]{x}}{\sqrt{2x+1}} = \lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}} \frac{1+\sqrt[6]{\frac{1}{x}}+\sqrt[4]{\frac{1}{x}}}{\sqrt{2+\frac{1}{x}}} = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

(c) $\lim\limits_{x\to4} \dfrac{\sqrt{1+2x}-3}{\sqrt{x}-2}$

Řešení:

Rozšířením dostaneme

$$\lim_{x\to4} \frac{\sqrt{1+2x}-3}{\sqrt{x}-2} = \lim_{x\to4} \frac{\sqrt{1+2x}-3}{\sqrt{x}-2} \frac{\sqrt{x}+2}{\sqrt{x}+2} \frac{\sqrt{1+2x}+3}{\sqrt{1+2x}+3} =$$

$$= \lim_{x\to4} \frac{1+2x-9}{x-4} \frac{\sqrt{x}+2}{\sqrt{1+2x}+3} = \lim_{x\to4} \frac{2(x-4)}{x-4} \frac{\sqrt{x}+2}{\sqrt{1+2x}+3} = \lim_{x\to4} 2\frac{\sqrt{x}+2}{\sqrt{1+2x}+3}$$
$$= 2\cdot\frac{2+2}{3+3} = \frac{4}{3}.$$

(d) $\lim\limits_{x\to a+} \dfrac{\sqrt{x}-\sqrt{a}+\sqrt{x-a}}{\sqrt{x^2-a^2}}$, kde $a>0$

Řešení:

Úpravou dostaneme

$$\lim_{x\to a+} \frac{\sqrt{x}-\sqrt{a}+\sqrt{x-a}}{\sqrt{x^2-a^2}} = \lim_{x\to a+} \frac{1}{\sqrt{x+a}} \cdot \lim_{x\to a+} \frac{\sqrt{x}-\sqrt{a}+\sqrt{x-a}}{\sqrt{x-a}} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2a}} \cdot \left[\lim_{x\to a+} \frac{\sqrt{x}-\sqrt{a}}{\sqrt{x-a}} + 1\right] = \frac{1}{\sqrt{2a}} + \frac{1}{\sqrt{2a}} \cdot \lim_{x\to a+} \frac{\sqrt{x}-\sqrt{a}}{\sqrt{x-a}} = \frac{1}{\sqrt{2a}},$$

neboť

$$\lim_{x\to a+}\frac{\sqrt{x}-\sqrt{a}}{\sqrt{x-a}}=\lim_{x\to a+}\frac{\sqrt{x}-\sqrt{a}}{\sqrt{x-a}}\cdot\frac{\sqrt{x}+\sqrt{a}}{\sqrt{x}+\sqrt{a}}=\lim_{x\to a+}\frac{x-a}{\sqrt{x-a}}\cdot\frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{a}}=$$

$$=\lim_{x\to a+}\frac{\sqrt{x-a}}{1}\cdot\frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{a}}=\frac{0}{1}\cdot\frac{1}{\sqrt{2a}}=0.$$

(e) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}-\sqrt{x}\right)$

Řešení:
Počítejme

$$\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}-\sqrt{x}\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}-x}{\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}+\sqrt{x}}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{x+\sqrt{x}}}{\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}+\sqrt{x}}=$$

vytknutím $\sqrt{x}$ v čitateli i jmenovateli a krácením dostaneme

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{1+\sqrt{\frac{1}{x}}}}{\sqrt{1+\sqrt{\frac{1}{x}+\sqrt{\frac{1}{x^3}}}}+1}=\frac{1}{2}.$$

(f) $\lim\limits_{x\to0+}\left(\sqrt{\frac{1}{x}+\sqrt{\frac{1}{x}+\sqrt{\frac{1}{x}}}}-\sqrt{\frac{1}{x}-\sqrt{\frac{1}{x}+\sqrt{\frac{1}{x}}}}\right)$

Řešení:
Rozšiřujeme.

$$\lim_{x\to0+}\frac{\frac{1}{x}+\sqrt{\frac{1}{x}+\sqrt{\frac{1}{x}}}-(\frac{1}{x}-\sqrt{\frac{1}{x}+\sqrt{\frac{1}{x}}})}{\sqrt{\frac{1}{x}+\sqrt{\frac{1}{x}+\sqrt{\frac{1}{x}}}}+\sqrt{\frac{1}{x}-\sqrt{\frac{1}{x}+\sqrt{\frac{1}{x}}}}}=\lim_{x\to0+}\frac{\sqrt{\frac{1}{x}+\sqrt{\frac{1}{x}}}+\sqrt{\frac{1}{x}+\sqrt{\frac{1}{x}}}}{\sqrt{\frac{1}{x}+\sqrt{\frac{1}{x}+\sqrt{\frac{1}{x}}}}+\sqrt{\frac{1}{x}-\sqrt{\frac{1}{x}+\sqrt{\frac{1}{x}}}}}=$$

Vytknutím $\sqrt{1/x}$ v čitateli i jmenovateli a zkrácením dostaneme

$$=\lim_{x\to0+}\frac{\sqrt{1+\sqrt{x}}+\sqrt{1+\sqrt{x}}}{\sqrt{1+\sqrt{x}+\sqrt{x^3}}+\sqrt{1-\sqrt{x+\sqrt{x^3}}}}=\frac{2}{2}=1.$$

V příkladu je možné i provést substituci $\frac{1}{x}=y$. Přitom je důležité, že původní limita je jednostranná, totiž že $x\to0+$, a proto $y=\frac{1}{x}\to+\infty$. Příklad se pak převede na výpočet

$$\lim_{y\to+\infty}\left(\sqrt{y+\sqrt{y+\sqrt{y}}}-\sqrt{y-\sqrt{y+\sqrt{y}}}\right)$$

(g) $\lim\limits_{x\to+\infty} x^{1/3}\left[(x+1)^{2/3}-(x-1)^{2/3}\right]$

Řešení:

Rozšířením dostaneme

$$\lim_{x\to\infty} x^{1/3}[(x+1)^{2/3}-(x-1)^{2/3}] = \lim_{x\to\infty} x^{1/3}\cdot\frac{(x+1)^2-(x-1)^2}{(x+1)^{4/3}+(x+1)^{2/3}(x-1)^{2/3}+(x-1)^{4/3}} =$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{4x\cdot x^{1/3}}{(x+1)^{4/3}+(x+1)^{2/3}(x-1)^{2/3}+(x-1)^{4/3}} =$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{4}{(1+\frac{1}{x})^{4/3}+(1+\frac{1}{x})^{2/3}(1-\frac{1}{x})^{2/3}+(1-\frac{1}{x})^{4/3}} = \frac{4}{1+1+1} = \frac{4}{3}.$$

4. Určete konstanty a a b, jestliže

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x^2+1}{x+1}-ax-b\right)=0.$$

Řešení: Počítejme.

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2+1}{x+1}-ax-b\right) = \lim_{x\to\infty}\frac{x^2+1-ax^2-ax-bx-b}{x+1} =$$

$$= \lim_{x\to\infty}\frac{x^2(1-a)-x(a+b)-b}{x+1}.$$

Limita má být rovna nule. To znamená, že v čitateli musí zmizet člen druhého i prvního řádu, a tedy máme podmínky

$$1-a=0,\quad a+b=0 \qquad\Longrightarrow\qquad a=1,\ b=-1.$$

5. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[n]{1+x}-1}{x}$, kde $n\in\mathbb{N}$

Řešení: Podle již známého vzorce $(A^k-B^k)=(A-B)(A^{k-1}+A^{k-2}B+\ldots+AB^{k-2}+B^{k-1})$ dostaneme

$$\lim_{x\to0}\frac{\sqrt[n]{1+x}-1}{x} = \lim_{x\to0}\frac{\sqrt[n]{1+x}-1}{x}\cdot\frac{\sqrt[n]{(1+x)^{n-1}}+\sqrt[n]{(1+x)^{n-2}}+\ldots+\sqrt[n]{(1+x)}+1}{\sqrt[n]{(1+x)^{n-1}}+\sqrt[n]{(1+x)^{n-2}}+\ldots+\sqrt[n]{(1+x)}+1} =$$

$$= \lim_{x\to0}\frac{1+x-1}{x}\cdot\frac{1}{\sqrt[n]{(1+x)^{n-1}}+\sqrt[n]{(1+x)^{n-2}}+\ldots+\sqrt[n]{(1+x)}+1} =$$

$$= \lim_{x\to0}\frac{1}{\sqrt[n]{(1+x)^{n-1}}+\sqrt[n]{(1+x)^{n-2}}+\ldots+\sqrt[n]{(1+x)}+1} =$$

$$= \frac{1}{1+1+\ldots+1+1} = \frac{1}{n}.$$

6. Vyšetřete chování kořenů x_1 a x_2 kvadratické rovnice $ax^2+bx+c=0$, v níž se koeficient a blíží k nule a koeficienty b a c jsou konstantní, přičemž $b \neq 0$.

   Řešení: Jde o to vyšetřit limitu

$$x_{1,2} = \lim_{a\to 0} \frac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a}.$$

   Chování kořenů je různé. Nechť x_1 je kořen se znaménkem plus u diskriminantu. Potom

$$\lim_{a\to 0} x_1 = \lim_{a\to 0} \frac{\sqrt{b^2-4ac}-b}{2a} = \lim_{a\to 0} \frac{(b^2-4ac)-b^2}{2a(\sqrt{b^2-4ac}+b)} = \lim_{a\to 0} \frac{-2c}{\sqrt{b^2-4ac}+b} = \frac{-2c}{\sqrt{b^2}+b} = -\frac{c}{b}.$$

   Nechť nyní x_2 je kořen se znaménkem minus u diskriminantu. Potom

$$\lim_{a\to 0} x_2 = \lim_{a\to 0} -\frac{\sqrt{b^2-4ac}+b}{2a}.$$

   V reálných číslech tato limita neexistuje (to je snadné dokázat, neboť čitatel má pro a dostatečně blízké nule znaménko jako číslo b, zatímco znaménko jmenovatele se mění v závislosti na tom, zda jdeme k nule zprava či zleva).

7. Nechť $a, A \in \mathbb{R}$. Nechť

$$\lim_{x\to a} f(x) + g(x) = A.$$

   Rozhodněte, zda je možné, aby pak

   (a) $\lim_{x\to a} f(x) = \infty$, $\lim_{x\to a} g(x) = -\infty$,
   Řešení: Ano. Např. $f(x) = \frac{1}{(x-a)^2}$, $g(x) = \frac{-1}{(x-a)^2} + A$.

   (b) ani jedna z limit $\lim_{x\to a} f(x)$, $\lim_{x\to a} g(x)$ neexistovala,
   Řešení: Ano. Např. $f(x) = \frac{1}{(x-a)}$, $g(x) = \frac{-1}{(x-a)} + A$.

   (c) existovala právě jedna z limit $\lim_{x\to a} f(x)$, $\lim_{x\to a} g(x)$.
   Řešení: Ne. Předpokládejme, že existuje $\lim_{x\to a} f(x) = B \in \mathbb{R}$. Navíc lze psát $g(x) = f(x) + g(x) - f(x)$. Pak z aritmetiky limit máme

$$\lim_{x\to a} g(x) = \lim_{x\to a} f(x) + g(x) - f(x) \overset{VOAL}{=} A - B.$$