12. cvičení – limity funkcí

https://www2.karlin.mff.cuni.cz/~kuncova/vyuka.php, kuncova@karlin.mff.cuni.cz

Teorie

Definice 1. *Reálnou funkcí jedné reálné proměnné* rozumíme zobrazení $f : M \to \mathbb{R}$, kde $M \subset \mathbb{R}$.

Nechť $c \in \mathbb{R}$ a $\varepsilon \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$. Potom definujeme

- *okolí bodu* c jako $\mathcal{B}(c, \varepsilon) = (c - \varepsilon, c + \varepsilon)$
- *prstencové okolí bodu* c jako $P(c, \varepsilon) = (c - \varepsilon, c + \varepsilon) \setminus \{c\}$

Prstencové okolí bodu $\pm\infty$ definujeme jako

$$P(\infty, \varepsilon) = \mathcal{B}(\infty, \varepsilon) = (1/\varepsilon, \infty)$$

$$P(-\infty, \varepsilon) = \mathcal{B}(-\infty, \varepsilon) = (-\infty, -1/\varepsilon)$$

Definice 2. Nechť $f : M \to \mathbb{R}$, $M \subset \mathbb{R}$. Řekneme, že f má v bodě $a \in \mathbb{R}^*$ *limitu* rovnou $A \in \mathbb{R}^*$, jestliže platí

$$\forall\, \varepsilon > 0 \quad \exists\, \delta > 0 \quad \forall x \in \mathcal{P}^{\delta}(a) : \quad f(x) \in \mathcal{B}(A, \varepsilon).$$

V takovém případě píšeme

$$\lim_{x \to a} f(x) = A.$$

Věta 3 (O aritmetice limit)**.** Nechť $a \in \mathbb{R}^*$, $\lim_{x\to a} f(x) = A \in \mathbb{R}^*$ a $\lim_{x\to a} g(x) = B \in \mathbb{R}^*$. Pak

(a) $\lim_{x\to a}(f(x) + g(x)) = A + B$, pokud je výraz $A + B$ definován;

(b) $\lim_{x\to a} f(x)g(x) = AB$, pokud je výraz AB definován;

(c) $\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{A}{B}$, pokud je výraz $\frac{A}{B}$ definován.

Věta 4. Nechť $c \in \mathbb{R}^*$, $\lim_{x\to c} g(x) = 0$, $\lim_{x\to c} f(x) = A$, kde $A \in \mathbb{R}^*$, $A > 0$. Jestliže existuje $\eta > 0$ takové, že funkce $g(x) > 0$ na $P(c, \eta)$, pak

$$\lim_{x\to c} \frac{f(x)}{g(x)} = +\infty.$$

Pozn.: Věta má svou varintu i pro jednostranné limity.

Definice 5. Nechť $f : M \to \mathbb{R}$, $M \subset \mathbb{R}$, $a \in M$. Řekneme, že f je *spojitá v bodě* a, jestliže

$$\lim_{x\to a} f(x) = f(a).$$

Poznámka 6. Jsou-li funkce f, g spojité v bodě $a \in \mathbb{R}$, pak také funkce $f + g$ a fg jsou spojité v bodě a. Je-li navíc $g(a) \neq 0$, pak také funkce $\frac{f}{g}$ je spojitá v bodě a.

Příklady

Z grafu

1. (a) $\lim_{x\to\infty} x$
   (b) $\lim_{x\to-\infty} x^2$
   (c) $\lim_{x\to-\infty} x^3$
   (d) $\lim_{x\to\infty} \sqrt{x}$
   (e) $\lim_{x\to0+} \sqrt{x}$
   (f) $\lim_{x\to\infty} \frac{1}{x}$
   (g) $\lim_{x\to-\infty} \frac{1}{x}$
   (h) $\lim_{x\to0} \frac{1}{x}$
   (i) $\lim_{x\to-\infty} \frac{1}{x^2}$
   (j) $\lim_{x\to0} \frac{1}{x^2}$
   (k) $\lim_{x\to\infty} e^x$
   (l) $\lim_{x\to-\infty} e^x$
   (m) $\lim_{x\to\infty} e^{-x}$
   (n) $\lim_{x\to0+} \ln x$
   (o) $\lim_{x\to\infty} \sin x$
   (p) $\lim_{x\to0} \cos x$
   (q) $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}+} \operatorname{tg} x$
   (r) $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}-} \operatorname{tg} x$
   (s) $\lim_{x\to0+} \cot x$
   (t) $\lim_{x\to0-} \cot x$

Z definice

2.❀ Určete z **definice** následující limity (či jejich neexistenci)

   (a) $\lim_{x\to2}(x+2) = 4$
   (b) $\lim_{x\to+\infty} \frac{x}{x+1} = 1$
   (c) $\lim_{x\to2} \frac{1}{|x-2|} = +\infty$
   (d) $\lim_{x\to0} \frac{1}{x}$ $\nexists$
   (e) $\lim_{x\to0+} \sin\frac{1}{x}$ $\nexists$

Přímo

3. (a) $\lim_{x\to3} \frac{3x+2}{-x+1}$
   (b) $\lim_{x\to\frac{\pi}{4}} \operatorname{tg} x$
   (c) $\lim_{x\to\infty} \frac{1}{(x-4)^2}$
   (d) $\lim_{x\to-\infty}(x+3)^2$
   (e) $\lim_{x\to\infty} \frac{3}{-8-x}$
   (f) $\lim_{x\to\infty} \frac{1}{\ln x+1}$
   (g) $\lim_{x\to\infty} \sqrt{x+2} + \sqrt{x}$

1/0

4. Spočtěte limity, příp. jednostranné limity.

   (a) $\lim_{x\to5} \frac{6}{x-5}$
   (b) $\lim_{x\to2} \frac{2}{(x-2)^2}$
   (c) $\lim_{x\to4} \frac{x^2}{x^2-16}$
   (d)❄ $\lim_{x\to-3} \frac{x^2-2x-3}{x^2+6x+9}$
   (e) $\lim_{x\to0} \frac{1}{\sin x}$

0/0

5. Vytkněte výraz s kořenem,

   (a) $\lim_{x\to1} \frac{x^2+3x-4}{x^2-2x+1}$
   (b) $\lim_{x\to0} \frac{x^3-2x^2+x}{2x^3+x^2-2x}$
   (c) $\lim_{x\to1} \frac{x^2+4x-5}{(x-1)^2}$
   (d) $\displaystyle\lim_{x\to1} \frac{x^2-1}{2x^2-x-1}$
   (e) $\displaystyle\lim_{x\to1} \frac{x^3-3x+2}{x^4-4x+3}$
   (f) $\displaystyle\lim_{x\to2} \frac{(x^2-x-2)^{20}}{(x^3-12x+16)^{10}}$

Bonus

6. Spočtěte limity

   (a) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^m - 1}{x^n - 1}$, kde $m, n \in \mathbb{N}$

   (b) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x + x^2 + \ldots + x^n - n}{x - 1}$, kde $n \in \mathbb{N}$

7. Najděte příklad funkce (stačí obrázkem), která:

   (a) Nemá limitu v nekonečnu.
   (b) Nemá limitu v čísle 3.
   (c) Má v nekonečnu limitu nekonečno.
   (d) Má v nekonečnu limitu -2.
   (e) Nemá limitu v 0, ale její absolutní hodnota ano.
   (f) Není spojitá v 0.
   (g) Je nespojitá v nekonečně mnoha bodech.
   (h) Má vlastní limitu v nekonečnu a je rostoucí.

8. Proč ten vtip není dobře?

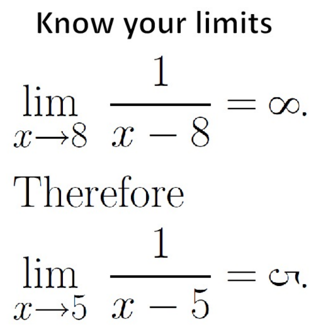

Figure 1: https://kityates.com/public-engagement/

9. Nechť $a \in \mathbb{R}^*$. Rozhodněte zda platí:

   a) Nechť je $\lim_{x\to a} f(x) = \pm\infty$. Potom $\lim_{x\to a} \frac{1}{f(x)} = 0$.

   b) Nechť je $\lim_{x\to a} f(x) = 0$. Potom je buď $\lim_{x\to a} \frac{1}{f(x)} = +\infty$ nebo $\lim_{x\to a} \frac{1}{f(x)} = -\infty$.

   c)✻ Nechť je $\lim_{x\to a} f(x) = 0$ a $f \neq 0$ na nějakém prstencovém okolí a. Potom je $\lim_{x\to a} \frac{1}{|f(x)|} = +\infty$.

   d1)♡ Nechť je $\lim_{x\to a} f(x) = 0$. Potom vždy existují obě jednostranné limity $\lim_{x\to a+} \frac{1}{f(x)}$ a $\lim_{x\to a-} \frac{1}{f(x)}$, nemusí se však rovnat.

   d2*) ❀ Co když navíc požadujeme, aby $f(x) \neq 0$ na nějakém prstencovém okolí bodu a ?

(2) napište definice (jak vypadá okolí bodu, okolí ∞. . .
(4d) $x^2 + 6x + 9 = (x+3)^2$, $x^2 - 2x - 3 = (x-3)(x+1)$
(9c) Zkuste definici.
(9d1) Uvažujte např. nějakou oscilující funkci/funkci, co často nabývá 0. Je limita $1/f$ vůbec definovaná?
(9d2) Uvažujte nějakou oscilující funkci, jež jde do 0. Nestačilo by pak předefinovat nulové body?