11. cvičení – rekurentní posloupnosti

https://www2.karlin.mff.cuni.cz/~kuncova/vyuka.php, kuncova@karlin.mff.cuni.cz

Příklady

1. Spočtěte limitu rekurentně zadané posloupnosti

   (a) $a_1 = 0$, $a_{n+1} = \frac{a_n+3}{4}$

   Řešení:

   Příklad is řešením máme odtud: https://users.math.cas.cz/~vanzura/SBIR8.PDF

   - Za předpokladu, že posloupnost má limitu, můžeme psát

     $$L = \lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} a_{n+1} = \lim_{n\to\infty} \frac{a_n+3}{4} \overset{AL}{=} \frac{L+3}{4}$$

     Odtud $L = 1$.

   - Posloupnost je omezená: Posloupnost je zřejmě kladná.
     Dále předpokládejme, že $a_n \le 1$. Pak

     $$a_{n+1} = \frac{a_n+3}{4} \le \frac{1+3}{4} = 1.$$

     Z indukce pak plyne, že $0 \le a_n \le 1$.

   - Posloupnost je neklesající:

     $$\begin{aligned} a_n &\le a_{n+1} \\ a_n &\le \frac{a_n+3}{4} \\ 4a_n &\le a_n + 3 \\ 3a_n &\le 3 \\ a_n &\le 1, \end{aligned}$$

     což je pravda z předchozího kroku.

   (b) $a_1 = \sqrt{2}$, $a_{n+1} = \sqrt{2 + a_n}$

   Řešení: Pro n-tý člen máme vzorec

   $$a_n = \underbrace{\sqrt{2 + \sqrt{2 + \ldots + \sqrt{2}}}}_{n \text{ odmocnin}}.$$

   Posloupnost a_n je zřejmě ostře rostoucí, neboť nerovnost $a_{n+1} > a_n$ se lehce ověří (např. umocněním). Dokážeme, že $a_n \le 2$ pro libovolné n; umocňováním na druhou totiž postupně dostáváme

   $$a_n \le 2 \Leftrightarrow \underbrace{\sqrt{2 + \sqrt{2 + \ldots + \sqrt{2}}}}_{n \text{ odmocnin}} \le 2 \Leftrightarrow 2 + \underbrace{\sqrt{2 + \sqrt{2 + \ldots + \sqrt{2}}}}_{n-1 \text{ odmocnin}} \le 4 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \underbrace{\sqrt{2+\sqrt{2+\ldots+\sqrt{2}}}}_{n-1 \text{ odmocnin}} \leq 2 \Leftrightarrow \ldots \Leftrightarrow \sqrt{2} \leq 2.$$

Protože posloupnost je monotónní a omezená, konverguje, tj. má vlastní limitu L. Tuto limitu lze nyní navíc snadno spočítat, neboť

$$\lim a_{n+1} = \lim \sqrt{2+a_n}$$

$$L = \sqrt{2+L}$$

$$L = 2.$$

(c) $a_1 = \sqrt{c}$, $a_{n+1} = \sqrt{c+a_n}$, kde $c \geq 0$.

Řešení:

Příklad is řešením máme odtud: https://www2.karlin.mff.cuni.cz/~pick/analyza.pdf

Pro $c = 0$ je posloupnost konstantě nulová a tedy $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$. Nechť $c > 0$. Zřejmě platí, že $a_n > 0$ pro $n \in \mathbb{N}$.

- Za předpokladu, že posloupnost má limitu, můžeme psát (věta o odmocnině)

$$L = \lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} a_{n+1} = \lim_{n\to\infty} \sqrt{c+a_n} = \sqrt{c+L}$$

Získáváme kvadratickou rovnici

$$L^2 - L - c = 0.$$

Tedy

$$L = \frac{1 \pm \sqrt{1+4c}}{2}$$

Ale protože posloupnost je kladná, nemůže mít zápornou limitu $\frac{1}{2}(1-\sqrt{1+4c})$. Tedy $L = \frac{1+\sqrt{1+4c}}{2}$.

- Posloupnost je rostoucí: Indukcí.
Zřejmě platí $a_1 < 1_2$. Pak

$$a_n = \sqrt{a_{n-1}+c} < \sqrt{a_n+c} = a_{n+1}.$$

Z indukce je tedy posloupnost $\{a_n\}$ rostoucí.

- Posloupnost je shora omezená: Zřejmě $a_1 < \sqrt{c}+1$. Ukážeme indukcí, že jestliže $a_n < \sqrt{c}+1$, pak i $a_{n+1} < \sqrt{c}+1$.

$$a_{n+1} = \sqrt{a_n+c} < \sqrt{\sqrt{c}+1+c} < \sqrt{2\sqrt{c}+1+c} = \sqrt{(\sqrt{c}+1)^2} = \sqrt{c}+1.$$

(d) $a_1 = 10$, $a_{n+1} = 6 - \frac{5}{a_n}$

Řešení:

Příklad is řešením máme odtud: https://www2.karlin.mff.cuni.cz/~pick/analyza.pdf

- Za předpokladu, že posloupnost má limitu, můžeme psát

$$L = \lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} a_{n+1} = \lim_{n\to\infty} 6 - \frac{5}{a_n} \overset{AL}{=} 6 - \frac{5}{L}$$

Získáváme kvadratickou rovnici

$$L^2 - 6L + 5 = 0.$$

Tedy

$$L_1 = 1, \qquad L_2 = 5.$$

- Posloupnost je zdola omezená:
Zřejmě $a_1 > 5$. Ukážeme indukcí, že jestliže $a_n > 5$, pak i $a_{n+1} > 5$.

$$a_{n+1} = 6 - \frac{5}{a_n} > 6 - \frac{5}{5} = 5.$$

- Posloupnost je klesající:

$$\begin{aligned} a_n &> a_{n+1} \\ a_n &> 6 - \frac{5}{a_n} \\ \frac{a_n^2 - 6a_n + 5}{a_n} &> 0 \\ \frac{(a_n-5)(a_n-1)}{a_n} &> 0 \end{aligned}$$

Poslední řádek, je ale pravdivý, protože už máme $a_n > 5$.

Závěr: $L = 5$.

(e) $a_1 > 0$, $a_{n+1} = \frac{1}{2}\left(a_n + \frac{1}{a_n}\right)$. Dokažte, že $\lim_{n\to\infty} a_n = 1$.

Řešení: Ukážeme, že posloupnost je omezená a monotónní, tedy konvergentní. Označíme-li potom její limitu L, potom musí platit

$$\lim x_{n+1} = \lim \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{1}{x_n}\right)$$

$$L = \lim \frac{1}{2}\left(L + \frac{1}{L}\right)$$

odkud plyne, že

$$L = \lim \frac{1}{2}\left(L + \frac{1}{L}\right) \Leftrightarrow L = \frac{1}{L} \Leftrightarrow L^2 = 1.$$

Zřejmě tedy limitou, pokud je posloupnost konvergentní, může být pouze číslo -1 nebo $+1$. Protože $x_0 > 0$, jsou všechny členy posloupnosti nezáporné (díky rekurentnímu vzorci), a tedy -1 nemůže být limitou, zbývá 1.

Zbývá dokázat konvergenci, tj. monotonii a omezenost. Podle nerovnosti mezi aritmetickým a geometrickým průměrem (AG-nerovnost) vyplývá, že pro libovolné $a > 0$ je

$$\frac{1}{2}\left(a + \frac{1}{a}\right) \geq \sqrt{a \cdot \frac{1}{a}} = 1,$$

a tedy platí, že libovolný člen posloupnosti s výjimkou x_0 je větší než 1.

$$x_{n+1} - x_n = \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{1}{x_n}\right) - x_n = \frac{1}{2}\left(\frac{1 - x_n^2}{x_n}\right) \leq 0.$$

Odtud plyne, že posloupnost je klesající (přičemž ostře, pokud $0 < x_0 \neq 1$, neboť v AG-nerovnosti nastává rovnost pouze tehdy, dělá-li se průměr stejných čísel). Z toho, že posloupnost je od druhého členu klesající plyne, že je omezená, neboť platí, že

$$0 < x_n \leq \max\{x_0, x_1\}.$$

(f) Nechť $0 \leq a \leq 1$. $a_1 = 0$, $a_{n+1} = a_n + \frac{1}{2}(a - a_n^2)$.
Řešení: Pokud $a = 0$, pak je posloupnost identicky nulová a limita je rovna 0.
Nechť tedy $a \neq 0$ a nechť $0 \leq x_n < \sqrt{a}$. Tato nerovnost jistě platí pro x_1. Pak $x_n = \sqrt{a} - \varepsilon$, kde $\varepsilon \leq \sqrt{a}$ a protože platí, že $\sqrt{a} \leq 1$, je také $\varepsilon \geq \sqrt{a}\varepsilon$, a proto

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= \sqrt{a} - \varepsilon + \frac{1}{2}(a - (\sqrt{a} - \varepsilon)^2) = \sqrt{a} - \varepsilon + \frac{1}{2}(2\varepsilon\sqrt{a} - \varepsilon^2) \\ &= \sqrt{a} + (\sqrt{a}\varepsilon - \varepsilon) - \varepsilon^2 \leq \sqrt{a} - \varepsilon^2 < \sqrt{a}. \end{aligned}$$

Přitom máme $x_{n+1} \geq 0$, protože pro $x_n < \sqrt{a}$ je přírůstek $\frac{1}{2}(a - x_n^2)$ kladné číslo. Indukcí jsme tak dokázali, že pokud $x_n < \sqrt{a}$, potom také $x_{n+1} < \sqrt{a}$.
Tím jsme indukcí dokázali, že posloupnost je omezená a že pro každé n přirozené platí, že $0 \leq x_n < \sqrt{a}$. Z toho plyne, že posloupnost x_n je rostoucí, protože

$$x_{n+1} - x_n = \frac{1}{2}(a - x_n^2) > 0.$$

Z toho plyne, že posloupnost je konvergentní a existuje vlastní limita $\lim x_n = L$. Z toho plyne, že musí platit

$$\lim x_{n+1} = \lim(x_n + \frac{1}{2}(a - x_n^2)) \Leftrightarrow L = L + \frac{1}{2}(a - L^2) \Leftrightarrow L^2 = a \Leftrightarrow L = \pm\sqrt{a}.$$

Protože ale všechny členy posloupnosti jsou kladné, připadá v úvahu pouze $L = \sqrt{a}$. Snadno se ověří, že výsledek platí i pro speciální případ $a = 0$.

(g) $a_1 = a$, $a_2 = b$, $a < b$. $a_{n+1} = \frac{a_n + a_{n-1}}{2}$.
Příklad is řešením máme odtud: https://www2.karlin.mff.cuni.cz/~pick/analyza.pdf

Tento vztah chápeme jako rovnici pro neznámou A. Rovnice má dvě řešení, a sice $A = 1$ a $A = 5$.

Zatím jsme dokázali pouze následující implikaci: je-li posloupnost konvergentní, pak platí buď $A = 1$ nebo $A = 5$. Zatím však nevíme, zda posloupnost nějakou limitu má. To se nyní budeme snažit dokázat, a to pomocí věty o limitě monotónní posloupnosti (Věta 2.4.1). Vzhledem k tomu, že $a_1 = 10$ a navíc, jak snadno ověříme dosazením, platí $a_2 < a_1$, je pravděpodobné, že limitou posloupnosti, pokud nějaká existuje, je spíše číslo 5 než číslo 1 a že posloupnost je klesající.

Dokážeme matematickou indukcí, že pro každé $n \in \mathbb{N}$ platí $a_n > 5$. Pro $n = 1$ je toto tvrzení zřejmé. Předpokládejme tedy, že pro nějaké $n \in \mathbb{N}$ platí $a_n > 5$. Potom

$$a_{n+1} = 6 - \frac{5}{a_n} > 6 - \frac{5}{5} = 5,$$

a tvrzení tedy vyplývá z principu matematické indukce.

Nyní dokážeme, že posloupnost $\{a_n\}$ je klesající. Zvolme $n \in \mathbb{N}$. Chceme dokázat, že

$$a_n > a_{n+1} = 6 - \frac{5}{a_n},$$

jinými slovy

$$a_n - 6 + \frac{5}{a_n} = \frac{a_n^2 - 6a_n + 5}{a_n} = \frac{(a_n - 5)(a_n - 1)}{a_n} > 0.$$

Poslední nerovnost ovšem snadno plyne z toho, že $a_n > 5$.

Dokázali jsme, že posloupnost $\{a_n\}$ je klesající a že pro každé $n \in \mathbb{N}$ platí $a_n > 5$, takže $\{a_n\}$ je zdola omezená. Podle věty o limitě monotónní posloupnosti (Věta 2.4.1) je tedy $\{a_n\}$ konvergentní. Označme její limitu symbolem A. Podle úvahy v první části řešení musí platit buď $A = 1$ nebo $A = 5$. Z toho, že pro každé $n \in \mathbb{N}$ platí $a_n > 5$, vyplývá podle věty o limitě a uspořádání (Věta 2.2.44(b)), že $A \geq 5$, takže možnost $A = 1$ je vyloučena. Můžeme tudíž učinit závěr, že

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 5.$$

♣

2.6.22. Příklad. Nechť $a_1, a_2 \in \mathbb{R}$, $a_1 < a_2$, a pro každé $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, je hodnota a_n zadána předpisem

$$a_{n+1} = \frac{a_n + a_{n-1}}{2}.$$

Rozhodněte, zda existuje $\lim a_n$ a pokud ano, spočtěte ji.

Řešení. Nejprve ukážeme, že pro každé $k \in \mathbb{N}$ platí

$$a_{2k-1} < a_{2k+1} < a_{2k+2} < a_{2k}. \tag{2.26}$$

Ze zadané nerovnosti $a_1 < a_2$ vyplývá, že

$$a_3 = \frac{a_2 + a_1}{2} < \frac{a_2 + a_2}{2} = a_2$$

a

$$a_3 = \frac{a_2 + a_1}{2} > \frac{a_1 + a_1}{2} = a_1.$$

Odtud dále plyne, že

$$a_4 = \frac{a_3 + a_2}{2} < \frac{a_2 + a_2}{2} = a_2$$

a podobně

$$a_4 = \frac{a_3 + a_2}{2} > \frac{a_3 + a_3}{2} = a_3.$$

Kombinací odhadů dostaneme

$$a_1 < a_3 < a_4 < a_2,$$

což je (2.26) pro $k = 1$. Předpokládejme, že (2.26) platí pro nějaké $k \in \mathbb{N}$. Pak z nerovnosti $a_{2k+1} < a_{2k+2}$ odvodíme

$$a_{2k+1} < \frac{a_{2k+1} + a_{2k+2}}{2} = a_{2k+3}.$$

Z této nerovnosti dále plyne

$$a_{2k+3} = \frac{a_{2k+2} + a_{2k+1}}{2} < \frac{a_{2k+2} + a_{2k+3}}{2} = a_{2k+4}.$$

Konečně z nerovnosti $a_{2k+1} < a_{2k+2}$ dostaneme

$$a_{2k+3} = \frac{a_{2k+2} + a_{2k+1}}{2} < a_{2k+2},$$

a tedy

$$a_{2k+4} = \frac{a_{2k+3} + a_{2k+2}}{2} < a_{2k+2}.$$

Ověřili jsme tedy platnost nerovností (2.26) pro každé $k \in \mathbb{N}$.

Z (2.26) plyne, že posloupnost $\{a_{2n}\}_{n=1}^{\infty}$ je klesající, posloupnost $\{a_{2n-1}\}_{n=1}^{\infty}$ je rostoucí a pro každé $n \in \mathbb{N}$ platí $a_1 \le a_n \le a_2$, takže posloupnosti $\{a_{2n}\}_{n=1}^{\infty}$ a $\{a_{2n-1}\}_{n=1}^{\infty}$ jsou omezené. Podle věty o limitě monotónní posloupnosti (Věta 2.4.1) tedy existují vlastní limity

$$\lim_{n\to\infty} a_{2n} = A \quad \text{a} \quad \lim_{n\to\infty} a_{2n-1} = B.$$

Ze vztahu

$$a_{n+1} = \frac{a_{n-1} + a_n}{2}$$

vyplývá, že

$$B = \frac{A + B}{2},$$

a tedy $A = B$. Obě posloupnosti $\{a_{2n}\}_{n=1}^{\infty}$ a $\{a_{2n-1}\}_{n=1}^{\infty}$ tedy konvergují ke stejné limitě.

Nechť $k \in \mathbb{N}$, $k \ge 2$. Přepíšeme vzorec definující a_k ve tvaru

$$a_{k+1} - a_k = a_{k-1} - a_{k+1}.$$

Nechť $n \in \mathbb{N}$. Potom pro hodnoty $k = 2, 3, \dots, n$ postupně dostaneme

$$\begin{aligned}
&a_3 - a_2 = a_1 - a_3,\\
&a_4 - a_3 = a_2 - a_4,\\
&\dots\\
&a_{n-1} - a_{n-2} = a_{n-3} - a_{n-1},\\
&a_n - a_{n-1} = a_{n-2} - a_n,\\
&a_{n+1} - a_n = a_{n-1} - a_{n+1}.
\end{aligned}$$

Sečtením všech těchto rovností dostaneme vztah

$$a_{n+1} - a_2 = a_1 + a_2 - a_n - a_{n+1}.$$

Odtud plyne, že

$$A - a_2 = a_1 + a_2 - A - A,$$

a tedy

$$A = \frac{a_1 + 2a_2}{3}.$$

♣

2.6.23. Příklad. Posloupnost $\{a_n\}$ nechť je zadána rekurentně pomocí vztahů $a_1 = 1$ a $a_{n+1} = \frac{1}{1+a_n}$, $n \in \mathbb{N}$. Ukažte, že tato posloupnost má limitu a spočtěte ji.

Řešení. Definujme funkce

$$f(x) = \frac{1}{1+x}, \quad g(x) = f(f(x)) = \frac{1+x}{2+x}, \quad x \in [0,1].$$

Nechť c značí kořen kvadratické funkce $x^2 + x - 1$ nacházející se v intervalu $[0,1]$, tj. $c = \frac{1}{2}(\sqrt{5}-1)$. Protože $g(x) = 1 - \frac{2}{1+x}$, je g na intervalu $[0,1]$ rostoucí a pomocí elementárního výpočtu ověříme, že

- rovnice $g(x) = x$ má v intervalu $[0,1]$ právě jeden kořen, a to c,
- $x < g(x) < c$ pro $x \in [0,c)$ a $c < x < g(x)$ pro $x \in (c,1]$.

Jelikož pro každé $k \in \mathbb{N}$ platí $a_{2k+2} = g(a_{2k})$ a $a_{2k+1} = g(a_{2k-1})$, dostáváme z vlastností funkce g nerovnosti

$$a_2 < a_4 < \dots < a_{2k} < a_{2k+2} < c < a_{2k+1} < a_{2k-1} < \dots < a_3 < a_1, \quad k \in \mathbb{N}.$$

Posloupnosti $\{a_{2k}\}$ a $\{a_{2k-1}\}$ jsou tedy monotónní a omezené, což znamená podle Věty 2.4.1, že jsou konvergentní. Označme $a = \lim a_{2k}$ a $b = \lim a_{2k-1}$. Protože $a_{2k+2} = g(a_{2k}) = \frac{1+a_{2k}}{2+a_{2k}}$, dostáváme z věty o aritmetice limit (Věta 2.2.36) rovnost $a = g(a)$. Proto $a = c$. Obdobně odvodíme, že $b = c$, a tedy $\lim a_n = \frac{1}{2}(\sqrt{5}-1)$ (vizte Větu 2.3.23). ♣

2.6.24. Příklad. Spočtěte limitu

$$\lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{2n}\right)^n.$$

2. Určete limity z definice:

(a) $a_n = \frac{n}{n+1}$

Řešení:

Příklad is řešením máme odtud: https://kag.upol.cz/mat1/texty/ch06/kapitola6.pdf

Položme $A = 1$. Mějme libovolné $\varepsilon > 0$. Hledáme takové n_0, že pro každé $n \geq n_0$ je

$$\left|\frac{n}{n+1} - 1\right| < \varepsilon.$$

Máme

$$\left|\frac{n}{n+1} - 1\right| = \frac{1}{n+1}$$

Počítejme

$$\begin{aligned} \frac{1}{n+1} &< \varepsilon \\ \frac{1}{\varepsilon} &< n+1 \\ \frac{1}{\varepsilon} - 1 &< n \end{aligned}$$

Pak stačí položit $n_0 = \lceil \frac{1}{\varepsilon} - 1 \rceil$.

(b) $a_n = \frac{1}{2^n}$

Řešení:

Příklad is řešením máme odtud: https://kag.upol.cz/mat1/texty/ch06/kapitola6.pdf

Položme $A = 0$. Mějme libovolné $\varepsilon > 0$. Hledáme takové n_0, že pro každé $n \geq n_0$ je

$$\left|\frac{1}{2^n} - 0\right| < \varepsilon.$$

Počítejme

$$\begin{aligned} \frac{1}{2^n} &< \varepsilon \\ \frac{1}{\varepsilon} &< 2^n \\ \log_2 \frac{1}{\varepsilon} &< n \end{aligned}$$

Pak stačí položit $n_0 = \lceil \log_2 \frac{1}{\varepsilon} \rceil$.

(c) $a_n = n^2$

Řešení: Položme $A = \infty$. Mějme libovolné $K > 0$. Hledáme takové n_0, že pro každé $n \geq n_0$ je

$$n^2 \geq K.$$

Počítejme

$$\begin{aligned} n^2 &\geq K \\ n &\geq \sqrt{K}. \end{aligned}$$

Pak stačí položit $n_0 = \lceil \sqrt{K} \rceil$.