11. cvičení – rekurentní posloupnosti

https://www2.karlin.mff.cuni.cz/~kuncova/vyuka.php, kuncova@karlin.mff.cuni.cz

Teorie

Definice 1. Nechť $\{a_n\}$ je posloupnost reálných čísel a $A \in \mathbb{R}$. Řekneme, že A je *vlastní limitou posloupnosti* $\{a_n\}$, jestliže

$$\forall\, \varepsilon > 0 \quad \exists\, n_0 \in \mathbb{N} \quad \forall n \geq n_0,\ n \in \mathbb{N}: \quad |a_n - A| < \varepsilon.$$

Značíme $\lim_{n\to\infty} a_n = A$, $\lim a_n = A$ nebo $a_n \to A$.

Řekneme, že posloupnost $\{a_n\}$ má limitu rovnou ∞, jestliže

$$\forall K \in \mathbb{R}\, \exists n_0 \in \mathbb{N}\, \forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_0 : a_n > K.$$

Věta 2 (O limitě vybrané posloupnosti)**.** Nechť $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ je posloupnost reálných čísel a nechť $\lim_{n\to\infty} a_n = A$. Nechť posloupnost $\{b_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ je vybraná z posloupnosti $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$. Pak $\lim_{k\to\infty} b_k = A$.

Věta 3 (Limita monotónní posloupnosti)**.** Nechť $\{a_n\}$ je monotónní posloupnost. Pak existuje $\lim_{n\to\infty} a_n$.

Je-li navíc $\{a_n\}$ neklesající, pak $\lim_{n\to\infty} a_n = \sup\{a_n : n \in \mathbb{N}\}$. Je-li $\{a_n\}$ nerostoucí, pak $\lim_{n\to\infty} a_n = \inf\{a_n : n \in \mathbb{N}\}$.

Důsledek 4. Každá neklesající shora omezená posloupnost je konvergentní. Podobně každá nerostoucí zdola omezená posloupnost je konvergentní.

Algoritmus

1. Ověříme, že je posloupnost dobře zadaná (nedělíme 0, pod odmocninou není záporné číslo ...).
2. Napíšeme **prvních pár členů** posloupnosti.
3. Spočteme limitu pomocí věty o **limitě vybrané posloupnosti**. Tento krok je na dluh - funguje pouze za předpokladu, že posloupnost má limitu, což musíme ještě ukázat.
4. Ukážeme, že je posloupnost **monotónní** (neklesající nebo nerostoucí). Neboli zda $a_n \leq a_{n+1}$ nebo $a_n \geq a_{n+1}$. Možno převést i na otázku zda
   (a) $a_n - a_{n+1} \leq 0$ (resp. $a_n - a_{n+1} \geq 0$),
   (b) $\frac{a_n}{a_{n+1}} \leq 1$ (resp. $\frac{a_n}{a_{n+1}} \geq 1$). Dáváme pozor na znaménka.

   Někdy pomůže indukce.
5. Ukážeme, že posloupnost je **omezená**.
   Někdy je dobrý nápad ukázat nejprve omezenost a až potom monotonii.
6. Uděláme **závěr**.

Hinty

AG nerovnost: pro $x_1, x_2, \dots, x_n \geq 0$ platí

$$\frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n} \geq \sqrt[n]{x_1 x_2 \cdots x_n}$$

Příklady

1. Spočtěte limitu rekurentně zadané posloupnosti

   (a)✿ $a_1 = 0$, $a_{n+1} = \frac{a_n+3}{4}$

   (b)❄ $a_1 = \sqrt{2}$, $a_{n+1} = \sqrt{2 + a_n}$

   (c)♡ $a_1 = \sqrt{c}$, $a_{n+1} = \sqrt{c + a_n}$, kde $c \geq 0$.

   (d)❀ $a_1 = 10$, $a_{n+1} = 6 - \frac{5}{a_n}$

   (e)✻ $a_1 > 0$, $a_{n+1} = \frac{1}{2}\left(a_n + \frac{1}{a_n}\right)$. Dokažte, že $\lim_{n\to\infty} a_n = 1$.

   (f)❀* Nechť $0 \leq a \leq 1$. $a_1 = 0$, $a_{n+1} = a_n + \frac{1}{2}(a - a_n^2)$.

   (g)☆* $a_1 = a$, $a_2 = b$, $a < b$. $a_{n+1} = \frac{a_n + a_{n-1}}{2}$.

2. Určete limity z definice:

   (a) $a_n = \frac{n}{n+1}$ (b) $a_n = \frac{1}{2^n}$ (c) $a_n = n^2$

Figure 1: https://tomrocksmaths.com/2022/03/15/linear-recurrence-relations-and-how-to-solve-them/

(1a) rostoucí, $a_n \leq 1$
(1b) rostoucí, $a_n \leq 2$
(1c) rostoucí, $a_n \leq \sqrt{c} + 1$
(1d) $a_n \geq 5$, klesající
(1e) z AG nerovnosti: $a_n \geq 1$, klesající

(1f) nechť $a_n = \sqrt{a} - \varepsilon$, kde $\varepsilon \leq \sqrt{a}$, pak $a_{n+1} \leq \sqrt{a}$
$a_n \leq \sqrt{a}$, rostoucí
(1g) ukažte: $a_{2n-1} \leq a_{2n+1} \leq a_{2n+2} \leq a_{2n}$
pak a_{2n} je klesající, pak a_{2n-1} je rostoucí, $a_1 \leq a_n \leq a_2$
ukažte: $a_3 - a_2 = a_1 - a_3$, pak $a_{n+1} - a_n = a_{n-1} - a_{n+1}$.