



## 10. cvičení – celá část

<https://www2.karlin.mff.cuni.cz/~kuncova/vyuka.php>, kuncova@karlin.mff.cuni.cz

### Příklady

1. Spočítejte limity s celou částí

(a)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{[\sqrt{n}]}{\sqrt{n}}$

**Řešení:** Použijeme odhady

$$\sqrt{n} - 1 < [\sqrt{n}] \leq \sqrt{n}$$

Platí

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n} - 1}{\sqrt{n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 - \frac{1}{\sqrt{n}}}{1} = 1$$

a

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n}} = 1.$$

Ze dvou policajtů pak i

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{[\sqrt{n}]}{\sqrt{n}} = 1.$$

(b)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\left[\frac{1+\sqrt{n}}{2}\right] + \left[\frac{n}{2}\right]}{n}$

**Řešení:** Odhadneme

$$\frac{\frac{1+\sqrt{n}}{2} - 1 + \frac{n}{2} - 1}{n} \leq \frac{\left[\frac{1+\sqrt{n}}{2}\right] + \left[\frac{n}{2}\right]}{n} \leq \frac{\frac{1+\sqrt{n}}{2} + \frac{n}{2}}{n}$$

Limity:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1+\sqrt{n}}{2} - 1 + \frac{n}{2} - 1}{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n \left( \frac{\sqrt{n}}{n} - \frac{3}{n} + 1 \right)}{2n} = \frac{1}{2}$$

a

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1+\sqrt{n}}{2} + \frac{n}{2}}{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n \left( \frac{1}{n} + \frac{\sqrt{n}}{n} + 1 \right)}{2n} = \frac{1}{2}.$$

Ze dvou policajtů máme

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\left[\frac{1+\sqrt{n}}{2}\right] + \left[\frac{n}{2}\right]}{n} = \frac{1}{2}.$$

(c)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n \log n}{\left[\frac{n}{2}\right]}$

**Řešení:** Máme odhad

$$2 \log n = \frac{n \log n}{\frac{n}{2}} \leq \frac{n \log n}{\left[\frac{n}{2}\right]}.$$

Protože  $\lim_{n \rightarrow \infty} 2 \log n = \infty$ , tak i  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n \log n}{\left[\frac{n}{2}\right]} = \infty$  z věty o uspořádání.

$$(d) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^3 - \left[ \frac{n^3}{100} \right] \cdot 100}{\sqrt{n}}$$

**Řešení:** (příklad převzat z [https://www2.karlin.mff.cuni.cz/~pick/analyz\\_a.pdf](https://www2.karlin.mff.cuni.cz/~pick/analyz_a.pdf))

Odhadneme

$$0 = \frac{n^3 - \frac{n^3}{100} \cdot 100}{\sqrt{n}} \leq \frac{n^3 - \left[ \frac{n^3}{100} \right] \cdot 100}{\sqrt{n}} \leq \frac{n^3 - \left( \frac{n^3}{100} - 1 \right) \cdot 100}{\sqrt{n}} = \frac{100}{\sqrt{n}}$$

Protože i

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{100}{\sqrt{n}} = 0,$$

tak ze dvou policajtů je

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^3 - \left[ \frac{n^3}{100} \right] \cdot 100}{\sqrt{n}} = 0.$$

$$(e) \lim_{n \rightarrow \infty} \left[ \sqrt[3]{n^3 + 8n^2} - \sqrt[3]{n^3 + 2n^2} \right]$$

**Řešení:** (příklad převzat z [https://www2.karlin.mff.cuni.cz/~pick/analyz\\_a.pdf](https://www2.karlin.mff.cuni.cz/~pick/analyz_a.pdf))

Výraz  $a_n = \sqrt[3]{n^3 + 8n^2} - \sqrt[3]{n^3 + 2n^2}$  lze upravit na

$$\begin{aligned} & \frac{6n^2}{(n^3 + 8n^2)^{2/3} + (n^3 + 8n^2)^{1/3}(n^3 + 2n^2)^{1/3} + (n^3 + 2n^2)^{2/3}} \\ &= \frac{6}{\left(1 + \frac{8}{n}\right)^{2/3} + \left(1 + \frac{8}{n}\right)^{1/3} \left(1 + \frac{2}{n}\right)^{1/3} + \left(1 + \frac{2}{n}\right)^{2/3}} \end{aligned}$$

Limita:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{6}{\left(1 + \frac{8}{n}\right)^{2/3} + \left(1 + \frac{8}{n}\right)^{1/3} \left(1 + \frac{2}{n}\right)^{1/3} + \left(1 + \frac{2}{n}\right)^{2/3}} = 2$$

Protože limita je rovna 2, tak od jistého  $n_0$  máme  $a_n \geq 1$ .

Protože máme nerovnost

$$3 < \left(1 + \frac{8}{n}\right)^{2/3} + \left(1 + \frac{8}{n}\right)^{1/3} \left(1 + \frac{2}{n}\right)^{1/3} + \left(1 + \frac{2}{n}\right)^{2/3}$$

tak dále platí, že

$$a_n < \frac{6}{3} = 2.$$

Dohromady

$$\lim_{n \rightarrow \infty} [a_n] = 1.$$

$$(f) \lim_{n \rightarrow \infty} \left[ \sqrt[3]{n^3 + 8n^2} - \sqrt[3]{n^3 + 2n^2} \right] \cdot \frac{(n^2 + n + 1)^{10} - (n + 1)^{20}}{(n^2 + 1)^{10} - (n + 1)^{20}}$$

**Řešení:**

Prve spočteme

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n^2 + n + 1)^{10} - (n + 1)^{20}}{(n^2 + 1)^{10} - (n + 1)^{20}} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n^{20} + 10n^{19} + 55n^{18} + \dots + 1) - (n^{20} + 20n^{19} + 190n^{18} + \dots + 1)}{(n^{20} + 10n^{18} + \dots + 1) - (n^{20} + 20n^{19} + 190n^{18} + \dots + 1)} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^{19} \cdot \left(10 + \frac{55}{n} + \dots + \frac{1}{n^{19}}\right) - \left(20 + \frac{190}{n} + \dots + \frac{1}{n^{19}}\right)}{\left(\frac{10}{n} + \dots + \frac{1}{n^{19}}\right) - \left(20 + \frac{190}{n} + \dots + \frac{1}{n^{19}}\right)} = \frac{-10}{-20} = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Pomocí předchozího příkladu a aritmetiky limit dostáváme

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left[ \sqrt[3]{n^3 + 8n^2} - \sqrt[3]{n^3 + 2n^2} \right] \cdot \frac{(n^2 + n + 1)^{10} - (n + 1)^{20}}{(n^2 + 1)^{10} - (n + 1)^{20}} = 1 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{2}.$$

$$(g) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\left[ \sqrt{n^3 + 1} \right] + \left[ \sqrt{n^3 - 1} \right]}{\sqrt[n]{1^n + 2^n + \dots + n^n}}$$

**Řešení:** (příklad převzat z <https://reseneulohy.cz/cs/matematika/matematika-analyza>)

Prve odhadneme

$$\left[ \sqrt{n^3 + 1} \right] + \left[ \sqrt{n^3 - 1} \right] \geq \sqrt{n^3 + 1} + \sqrt{n^3 - 1} - 2 \geq \sqrt{n^3 + 1} - 2 \geq \sqrt{n^3} - 2$$

a

$$\sqrt[n]{1^n + 2^n + \dots + n^n} \leq \sqrt[n]{n^n + n^n + \dots + n^n} = n \sqrt[n]{n}$$

Dohromady máme

$$\frac{\left[ \sqrt{n^3 + 1} \right] + \left[ \sqrt{n^3 - 1} \right]}{\sqrt[n]{1^n + 2^n + \dots + n^n}} \geq \frac{\sqrt{n^3} - 2}{n \sqrt[n]{n}}$$

Navíc

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n^3} - 2}{n \sqrt[n]{n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n} - \frac{2}{n}}{\sqrt[n]{n}} = \infty.$$

Tedy z věty o uspořádání je

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\left[ \sqrt{n^3 + 1} \right] + \left[ \sqrt{n^3 - 1} \right]}{\sqrt[n]{1^n + 2^n + \dots + n^n}} = \infty$$

$$(h) \lim_{n \rightarrow \infty} \left[ \sqrt[4]{n^4 + 4n^3} - n \right]$$

**Řešení:** (příklad převzat z <https://reseneulohy.cz/cs/matematika/matematika-analyza>)

Prve rozšíříme podle vzorce

$$\begin{aligned} a_n = \sqrt[4]{n^4 + 4n^3} - n &= \frac{4n^3}{\sqrt[4]{(n^4 + 4n^3)^3} + n \sqrt[4]{(n^4 + 4n^3)^2} + n^2 \sqrt[4]{(n^4 + 4n^3)} + n^3} \\ &= \frac{4}{\sqrt[4]{\left(1 + \frac{4}{n}\right)^3} + \sqrt[4]{\left(1 + \frac{4}{n}\right)^2} + \sqrt[4]{1 + \frac{4}{n}} + 1} \end{aligned}$$

Limita bez celé části  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = -/4 = 1$ .

Zároveň máme odhady

$$0 < \frac{4}{\sqrt[4]{\left(1 + \frac{4}{n}\right)^3} + \sqrt[4]{\left(1 + \frac{4}{n}\right)^2} + \sqrt[4]{\left(1 + \frac{4}{n}\right)} + 1} < 1$$

Celkem tedy

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left[ \sqrt[4]{n^4 + 4n^3 - n} \right] = 0$$

(i)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n\sqrt{n} \sqrt[n]{(n+1)^n + n^{n+1}}}{[\sqrt{n}] + [2\sqrt{n}] + \dots + [n\sqrt{n}]}$

**Řešení:** (příklad převzat z <https://reseneulohy.cz/cs/matematika/matematika-analyza>)

Prve odhadneme

$$[\sqrt{n}] + [2\sqrt{n}] + \dots + [n\sqrt{n}] \geq \sqrt{n} - 1 + 2\sqrt{n} - 1 + \dots - 1 + n\sqrt{n} - 1 = \sqrt{n} \frac{n(n+1)}{2} - n$$

a

$$[\sqrt{n}] + [2\sqrt{n}] + \dots + [n\sqrt{n}] \leq \sqrt{n} + 2\sqrt{n} + \dots + n\sqrt{n} = \sqrt{n} \frac{n(n+1)}{2}.$$

Dohromady

$$\frac{n\sqrt{n} \sqrt[n]{(n+1)^n + n^{n+1}}}{\sqrt{n} \frac{n(n+1)}{2}} \leq \frac{n\sqrt{n} \sqrt[n]{(n+1)^n + n^{n+1}}}{[\sqrt{n}] + [2\sqrt{n}] + \dots + [n\sqrt{n}]} \leq \frac{n\sqrt{n} \sqrt[n]{(n+1)^n + n^{n+1}}}{\sqrt{n} \frac{n(n+1)}{2} - n}$$

Spočteme limity

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n\sqrt{n} \sqrt[n]{(n+1)^n + n^{n+1}}}{\sqrt{n} \frac{n(n+1)}{2}} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2 \sqrt[n]{(n+1)^n + n^{n+1}}}{(n+1)} = \lim_{n \rightarrow \infty} 2 \sqrt[n]{\frac{(n+1)^n + n^{n+1}}{(n+1)^n}} \\ &= 2 \sqrt[n]{1 + n \left(\frac{n}{n+1}\right)^n} \end{aligned}$$

Aplikujeme dva policajty:

$$2 \sqrt[n]{1 + n \left(\frac{n}{n+1}\right)^n} \leq 2 \sqrt[n]{1+n} \leq 2 \sqrt[n]{2n} \rightarrow 2 \cdot 1,$$

z druhé strany

$$2 \sqrt[n]{1 + n \left(\frac{n}{n+1}\right)^n} \geq 2 \sqrt[n]{1} \rightarrow 2 \cdot 1.$$

Tedy

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n\sqrt{n} \sqrt[n]{(n+1)^n + n^{n+1}}}{\sqrt{n} \frac{n(n+1)}{2}} = 2.$$

Limitu horního policajta spočteme jako

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n\sqrt{n} \sqrt[n]{(n+1)^n + n^{n+1}}}{\sqrt{n} \frac{n(n+1)}{2} - n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n\sqrt{n} \sqrt[n]{(n+1)^n + n^{n+1}}}{\sqrt{n} \frac{n(n+1)}{2}} \cdot \frac{1}{\left(1 - \frac{2}{\sqrt{n}(n+1)}\right)} \stackrel{VOAL}{=} 2 \times 1.$$

Závěr: ze dvou policajtů

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n\sqrt{n} \sqrt[n]{(n+1)^n + n^{n+1}}}{[\sqrt{n}] + [2\sqrt{n}] + \dots + [n\sqrt{n}]} = 2$$

(j)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^n [kx]$

**Řešení:** Zřejmě platí, že  $kx - 1 \leq [kx] \leq kx$ , a protože

$$\begin{aligned} \frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^n (kx - 1) &= \frac{1}{n^2} (x(1 + \dots + n) - (1 + \dots + 1)) \\ &= \frac{1}{n^2} \left( x \frac{n(n+1)}{2} - n \right) = x \frac{n(n+1)}{2n^2} - \frac{1}{n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \frac{x}{2} \end{aligned}$$

a

$$\frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^n (kx) = \frac{1}{n^2} (x(1 + \dots + n)) = \frac{1}{n^2} \left( x \frac{n(n+1)}{2} \right) = x \frac{n(n+1)}{2n^2} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \frac{x}{2},$$

je hledaná limita rovna  $x/2$  podle věty o sevření.

## Teorie

2. Buď dáno  $x \in (0, \infty)$ . Označme  $[x]$  celou část čísla  $x$  a  $\{x\} = x - [x]$  desetinný rozvoj čísla  $x$ . (Například  $\{\pi\} = 0,1415926\dots$ ) Sestrojme posloupnost

$$\{x\}, \{2x\}, \{3x\}, \dots, \{nx\}, \dots$$

Dokažte, že:

- Je-li  $x$  celé, má posloupnost limitu 0.
- Je-li  $x$  racionální necelé, tj.  $x = r/s$ , má posloupnost hromadné body  $0, \frac{1}{s}, \frac{2}{s}, \dots, \frac{s-1}{s}$ .
- Je-li  $x$  iracionální, vyplňují hromadné body posloupnosti celý interval  $[0, 1]$ .

**Řešení:**

- Posloupnost je konstantní, neboť pro libovolné celé  $x$  je  $nx$  celé číslo a tedy  $\{kx\} = 0$ .
- Pro jednoduchost předpokládejme, že  $r, s$  jsou nesoudělná. Proto není možné, aby kterékoli z čísel  $\frac{r}{s}, \frac{2r}{s}, \dots, \frac{(s-1)r}{s}$  bylo celé. Dokonce ani není možné, abychom po dělení  $s$  dostali stejný zbytek; kdyby tomu tak u dvou čísel bylo, byl by dělitelný jejich rozdíl. To ale není možné, došlo by ke sporu s nesoudělností.

Pak už stačí uvažovat jakékoli celé číslo  $k \in \mathbb{Z}$ . Pro něj platí  $\{n \frac{r}{s}\} = \{(n+ks) \frac{r}{s}\}$ , a tedy posloupnost obsahuje nekonečně členů rovných kterémukoli z „hromadných bodů“.

c) Necht'  $a$  je libovolné číslo z intervalu  $[0, 1]$  a volme  $0 < \varepsilon < 1$ . Stačí ukázat, že pro takto libovolně zvolené  $\varepsilon$  existuje člen posloupnosti  $\{n\theta\}$ , který se od  $a$  liší méně než o  $\varepsilon$ .

Podle následujícího příkladu lze nalézt přirozená čísla  $q, p$  tak, že  $|q\theta - p| = \varepsilon_1 < \varepsilon$ , přičemž  $\varepsilon_1 > 0$ , neboť  $\theta$  není racionální. Mohou nastat dva případy:

1.  $q\theta - p = \varepsilon_1$ . Potom  $\{q\theta\} = \varepsilon_1$ . Dále  $\{2q\theta\} = 2\varepsilon_1$  až po nějaké číslo  $\{kq\theta\} = k\varepsilon_1$ , kde  $k$  je maximální takové, aby  $k\varepsilon_1 < 1$ . Konečná posloupnost zbytků  $\varepsilon_1, 2\varepsilon_1, \dots, k\varepsilon_1$  dělí interval  $(0, 1)$  na podinterválky délky  $\varepsilon_1$  a číslo  $a$  do některého musí spadnout. Za vhodné  $n$  pak stačí vzít takové, aby  $n\varepsilon_1$  byl hraniční bod interválu, do něhož číslo  $a$  spadne. Potom je zřejmě  $|\{nq\theta\} - a| \leq \varepsilon_1 < \varepsilon$ .

2.  $q\theta - p = -\varepsilon_1$ . Postup je podobný, jenom s přihlédnutím k tomu, že  $q\theta - p = -\varepsilon_1$ , a proto je  $\{q\theta\} = 1 - \varepsilon_1$ ,  $\{2q\theta\} = 1 - 2\varepsilon_1$  dtto. Tak se opět interval  $(0, 1)$  rozseká na malé kousky atd.

**Pomocný příklad.** a) Necht'  $\theta \in \mathbb{R}$  a  $t \in \mathbb{N}$ . Potom existují celá čísla  $p_t, q_t$  tak, že  $|q_t\theta - p_t| < \frac{1}{t}$ . Přitom  $0 < q \leq t$ . Dokažte.

b) Jestliže  $\theta$  je iracionální, je  $\lim_{t \rightarrow \infty} q_t = +\infty$ .

*Návod:* a) Ke každému číslu  $k = 0, 1, \dots, t$  najdeme celé číslo  $r_k$  tak, že  $0 \leq k\theta - r_k < 1$  (tzn.  $r_k = [k\theta]$ , kde  $[\cdot]$  značí celou část čísla uvnitř). Interval  $[0, 1]$  rozdělíme na  $t$  intervalů

$$I_1 = \left[0, \frac{1}{t}\right), I_2 = \left[\frac{1}{t}, \frac{2}{t}\right), \dots, I_t = \left[\frac{t-1}{t}, \frac{t}{t}\right).$$

Položme  $x_k = k\theta - r_k$  pro  $k = 0, 1, \dots, t$ . Všech čísel  $x_k$  je celkem  $t + 1$ , a proto v některém z intervalů výše leží alespoň dvě z nich, označme je  $x_{k_1}, x_{k_2}$ , kde  $k_1 < k_2$ . Odtud plyne, že číslo  $|x_{k_2} - x_{k_1}|$  leží v intervalu  $[0, \frac{1}{t})$ . Proto

$$0 \leq |x_{k_2} - x_{k_1}| = |(k_2 - k_1)\theta - (r_{k_2} - r_{k_1})| < \frac{1}{t}$$

a stačí položit  $q = k_2 - k_1$  a  $p = r_{k_2} - r_{k_1}$ . Zbývá ukázat, že  $0 < q \leq t$ . Ale to je zřejmé, protože  $k_2 > k_1$  a zároveň obě  $k$  nabývají hodnot menších než  $t$ .

b) Čísla  $q_t$  jsou přirozená. Pokud by posloupnost nekonvergovala do nekonečna, muselo by existovat nekonečně mnoho přirozených čísel  $t_1 < t_2 < t_3 < \dots$ , kterým by příslušelo totéž  $q$  a tím pádem nutně také totéž  $p$ . Pak by bylo

$$|q\theta - p| < \frac{1}{t_n} \implies 0 \leq |q\theta - p| \leq \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t_n} = 0 \implies q\theta - p = 0 \implies \theta = \frac{p}{q},$$

což je spor s iracionalitou čísla  $\theta$ .