10. cvičení – celá část

https://www2.karlin.mff.cuni.cz/~kuncova/vyuka.php, kuncova@karlin.mff.cuni.cz

Teorie

Definice 1. Nechť $x \in \mathbb{R}$. Potom číslo $k \in \mathbb{Z}$ splňující $k \leq x < k+1$ nazýváme *celou částí* čísla x a značíme $\lfloor x \rfloor$ nebo $[x]$.

Hinty

$$\begin{aligned} x - 1 < \lfloor x \rfloor &\leq x \\ \lfloor x \rfloor \leq \quad x \quad &< \lfloor x \rfloor + 1 \end{aligned}$$

$$1 + 2 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

Algoritmus

K dispozici máme dva postupy:

1. Použijeme odhady $x - 1 < \lfloor x \rfloor \leq x$ a aplikujeme **dva policajty**.
   Varianta: jde-li posloupnost k ∞, stačí spodní policajt.
2. Pro typ $\lim_{n\to\infty} [a_n]$ (celá část kolem celé posloupnosti a_n): Spočteme $\lim_{n\to\infty} a_n = A$, A je typicky celé číslo. Pak ukážeme, zda jde ke své limitě **shora** (celé části to neublíží) nebo **zdola** (celá část vyjde o 1 menší).

Příklady

1. Spočtěte limity s celou částí

(a) $\displaystyle \lim_{n\to\infty} \frac{[\sqrt{n}]}{\sqrt{n}}$

(b) $\displaystyle \lim_{n\to\infty} \frac{\left[\frac{1+\sqrt{n}}{2}\right] + \left[\frac{n}{2}\right]}{n}$

(c) $\displaystyle \lim_{n\to\infty} \frac{n \log n}{\left[\frac{n}{2}\right]}$

(d) $\displaystyle \lim_{n\to\infty} \frac{n^3 - \left[\frac{n^3}{100}\right] \cdot 100}{\sqrt{n}}$

(e) $\displaystyle \lim_{n\to\infty} \left[\sqrt[3]{n^3 + 8n^2} - \sqrt[3]{n^3 + 2n^2}\right]$

(f) $\displaystyle \lim_{n\to\infty} \left[\sqrt[3]{n^3 + 8n^2} - \sqrt[3]{n^3 + 2n^2}\right] \cdot \frac{(n^2+n+1)^{10} - (n+1)^{20}}{(n^2+1)^{10} - (n+1)^{20}}$

(g) $\displaystyle \lim_{n\to\infty} \frac{\left[\sqrt{n^3+1}\right] + \left[\sqrt{n^3-1}\right]}{\sqrt[n]{1^n + 2^n + \cdots n^n}}$

(h) $\displaystyle \lim_{n\to\infty} \left[\sqrt[4]{n^4 + 4n^3} - n\right]$

(i) $\displaystyle \lim_{n\to\infty} \frac{n\sqrt{n}\,\sqrt[n]{(n+1)^n + n^{n+1}}}{[\sqrt{n}] + [2\sqrt{n}] + \cdots + [n\sqrt{n}]}$

(j) $\displaystyle \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^{n} [kx]$, $x \in \mathbb{R}$

Teorie

2. Buď dáno $x \in (0, \infty)$. Označme $[x]$ celou část čísla x a $\{x\} = x - [x]$ desetinný rozvoj čísla x. (Například $\{\pi\} = 0,1415926\ldots$.) Sestrojme posloupnost

$$\{x\},\ \{2x\},\ \{3x\},\ \ldots,\ \{nx\},\ \ldots$$

Dokažte, že:

(a) Je-li x celé, má posloupnost limitu 0.

(b)✿ Je-li x racionální necelé, tj. $x = r/s$, má posloupnost hromadné body $0, \frac{1}{s}, \frac{2}{s}, \ldots, \frac{s-1}{s}$.

(c)** ✾ Je-li x iracionální, vyplňují hromadné body posloupnosti celý interval $[0, 1]$.

3. **Pomocný příklad k (c).** Dokažte:

(a) Nechť $\theta \in \mathbb{R}$ a $t \in \mathbb{N}$. Potom existují celá čísla p_t, q_t tak, že $|q_t\theta - p_t| < \frac{1}{t}$. Přitom $0 < q \leq t$.

(b)♡ Jestliže θ je iracionální, je $\lim\limits_{t\to\infty} q_t = +\infty$.

(2b) Uvažujte r, s nesoudělná a zkoumejte zlomky $\frac{r}{s}, \frac{2r}{s}, \frac{3r}{s}, \ldots$

(3a) Pro čísla $k = 0, 1, \ldots, t$ položme $r_k = \lfloor k\theta \rfloor$. Rozdělme interval $[0, 1]$ na části o délce $1/t$. Zkoumejme čísla $x_k = k\theta - r_k$ a kde leží v intervalu.

(3b) Sporem.