9. cvičení – Limsup, liminf

https://www2.karlin.mff.cuni.cz/~kuncova/vyuka.php, kuncova@karlin.mff.cuni.cz

Teorie

Definice 1. Nechť $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ je posloupnost reálných čísel. Pak definujeme

$$\limsup a_n := \begin{cases} \lim_{n\to\infty} \sup\{a_k; k \geq n\}, & \text{jestliže je } a_n \text{ shora omezená} \\ \infty, & \text{jestliže je } a_n \text{ shora neomezená.} \end{cases}$$

Tuto hodnotu nazýváme *limes superior* posloupnosti $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$. Obdobně definujeme *limes inferior* posloupnosti $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ předpisem

$$\liminf a_n := \begin{cases} \lim_{n\to\infty} \inf\{a_k; k \geq n\}, & \text{jestliže je } a_n \text{ zdola omezená} \\ -\infty, & \text{jestliže je } a_n \text{ zdola neomezená.} \end{cases}$$

Definice 2. Nechť $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ je posloupnost reálných čísel. Pak $A \in \mathbb{R}^*$ nazveme *hromadnou hodnotou* posloupnosti $\{a_n\}$, jestliže existuje vybraná posloupnost $\{a_{n_k}\}_{k\in\mathbb{N}}$ taková, že $\lim_{k\to\infty} a_{n_k} = A$. Množinu všech hromadných hodnot značíme $H(\{a_n\})$.

Věta 3 (O vztahu limes superior, limes inferior a hromadných hodnot)**.** Nechť $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ je posloupnost reálných čísel. Potom $H(\{a_n\}) \neq \emptyset$, $\limsup a_n = \max H(\{a_n\})$ a $\liminf a_n = \min H(\{a_n\})$ (maximum a minimum se uvažuje v $\mathbb{R}^*$).

Věta 4 (O limitě vybrané posloupnosti)**.** Nechť $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ je posloupnost reálných čísel a nechť $\lim_{n\to\infty} a_n = A$. Nechť posloupnost $\{b_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ je vybraná z posloupnosti $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$. Pak $\lim_{k\to\infty} b_k = A$.

Příklady

1. Spočtěte limitu, neexistuje-li, najděte limes superior a inferior a hromadné body

   (a) $\lim\limits_{n\to\infty} \sin\left(n\dfrac{\pi}{4}\right)$

   (b) $\lim\limits_{n\to\infty} 3\left(1-\dfrac{1}{n}\right) + 2(-1)^n$

   (c) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{2n^2+2n+n\sin 2n}{n\cos 3n + (2n+\sin 4n)^2}$

   (d) $\lim\limits_{n\to\infty} (-1)^{n-1}\left(2+\dfrac{3}{n}\right)$

   (e) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{(-1)^n}{n} + \dfrac{1+(-1)^n}{2}$

   (f) $\lim\limits_{n\to\infty} 1 + \dfrac{n}{n+1}\cos\dfrac{n\pi}{2}$

   (g) $\lim\limits_{n\to\infty} 1 + 2(-1)^{n+1} + 3\cdot(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}$

   (h) $\lim\limits_{n\to\infty} (\cos \pi n)n$

   (i) $\lim\limits_{n\to\infty} -n(2+(-1)^n)$

   (j) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{2n(-1)^n}{n+1} + \sqrt[n]{2}$

Bonus

2. (a) Nechť M je konečná množina přirozených čísel. Najděte posloupnost a_n takovou, že její množina hromadných bodů je rovna M.

   (b) Najděte posl. a_n takovou, že její množina hromadných bodů je rovna $\mathbb{N}\cup\infty$.

   (c) Ukažte, že nelze najít takovou posloupnost, aby množina jejích hromadných bodů byla rovna $\mathbb{N}$.

Opakování

3. Spočtěte limity

(a) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\sin n}{n}$

(b) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left(1+\frac{2}{n}\right)^n + \left(1-\frac{1}{n}\right)^n}$

(c) $\lim\limits_{n\to\infty} (-1)^n \frac{n^2 \sqrt[n]{n}}{n^3 + \sqrt[2n]{n}}$

(d) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n^3+n+1}{n^\alpha}$, $\alpha \in \mathbb{N}$

(e) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{(n+1)^2 + (3n+2)^4}{n^\alpha + n^4}$, $\alpha \in \mathbb{N}$

(f) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{(n-2)^4 - (n^2+1)^2}{n^\alpha + n^2}$, $\alpha \in \mathbb{N}$

(g) $\lim\limits_{n\to+\infty} n^\alpha \left(\sqrt[3]{n^2+1} - \sqrt[3]{n^2-1}\right)$, $\alpha \in \mathbb{R}$

(h) Určete $a, b \in \mathbb{R}$ tak, aby $\lim\limits_{n\to\infty} (\sqrt[3]{n^3-n} - an - b) = 0$

(i) Určete $\alpha > 0$ tak, aby násl. limita byla vlastní $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{(n^\alpha+1)^3 + \alpha(-1)^n}{n^2(\sqrt{n^2+1} - n)}$

(j) $\lim\limits_{n\to\infty} (\sqrt{4n^2-n} - 2n)$

(k) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{(n+2)! + (n+1)!}{(n+2)! - (n+1)!}$

(l) $\lim\limits_{n\to\infty} (1 + \sin n\pi)$