



8. cvičení – éčko

<https://www2.karlin.mff.cuni.cz/~kuncova/vyuka.php>, kuncova@karlin.mff.cuni.cz

Příklady

1. (a)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{3n}$$

Řešení:

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{3n} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \right)^3 \\ &\stackrel{VOAL}{=} \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \\ &= e \cdot e \cdot e = e^3 \end{aligned}$$

(b)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{2n}\right)^n$$

Řešení:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{2n}\right)^n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{2n}\right)^{\frac{2n}{2}} = \sqrt{\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{2n}\right)^{2n}} = \sqrt{e}$$

U druhého rovnítka jsme použili větu o mocnině a limitě. U poslední rovnosti jsme užili limitu vybrané posloupnosti, neboť posloupnost a_{2n} musí mít stejnou limitu jako posloupnost a_n , což je známá limita jdoucí k e .

(c)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n$$

Řešení:

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n-1}{n}\right)^n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n}{n-1}\right)^{-n} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\left(1 + \frac{1}{n-1}\right)^{n-1+1} \right)^{-1} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\left(1 + \frac{1}{n-1}\right)^{n-1} \right)^{-1} \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\left(1 + \frac{1}{n-1}\right)^1 \right)^{-1} \\ &\stackrel{VOAL}{=} \frac{1}{e} \end{aligned}$$

(d)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n-1}{n+1}\right)^n$$

Řešení:

$$\begin{aligned}\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n-1}{n+1} \right)^n &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n+1-1-1}{n+1} \right)^n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{2}{n+1} \right)^n \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{2}{n+1} \right)^{n+1-1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\left(1 - \frac{2}{n+1} \right)^{n+1}}{\left(1 - \frac{2}{n+1} \right)} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\left(1 + \frac{1}{\frac{n+1}{-2}} \right)^{n+1}}{\left(1 - \frac{2}{n+1} \right)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\left(1 + \frac{1}{\frac{n+1}{-2}} \right)^{\frac{n+1}{-2} \cdot (-2)}}{\left(1 - \frac{2}{n+1} \right)} \\ &\stackrel{VOAL}{=} \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\left(1 + \frac{1}{\frac{n+1}{-2}} \right)^{\frac{n+1}{-2}} \right)^{-2}}{\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{2}{n+1} \right)} = \frac{e^{-2}}{1}\end{aligned}$$

(e)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n^2} \right)^n$$

Řešení:

$$\left(1 + \frac{1}{n^2} \right)^n = \left(1 + \frac{1}{n^2} \right)^{\frac{n^2}{n}} = \sqrt[n]{\left(1 + \frac{1}{n^2} \right)^{n^2}}$$

Z Věty o limitě vybrané posloupnosti máme, že

$$\left(1 + \frac{1}{n^2} \right)^{n^2} \rightarrow e,$$

tedy lze nalézt n_0 tak, že pro každé $n \geq n_0$ máme

$$\left(1 + \frac{1}{n^2} \right)^{n^2} < 10.$$

a

$$1 < \left(1 + \frac{1}{n^2} \right)^{n^2}$$

Dohromady máme odhady:

$$1 = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{1} \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\left(1 + \frac{1}{n^2} \right)^{n^2}} \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{10} = 1,$$

tedy z Věty o dvou polícajtech máme

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\left(1 + \frac{1}{n^2} \right)^{n^2}} = 1.$$

(f) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n, x \in \mathbb{R}$

Řešení: Uvažujme tři případy.

i. Necht' $x > 0$, pak

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{\frac{n}{x}}\right)^{\frac{n}{x} \cdot x} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\left(1 + \frac{1}{\frac{n}{x}}\right)^{\frac{n}{x}}\right)^x = e^x$$

Využili jsme posloupnost $x_n = n/x$, pro niž platí $x_n \rightarrow \infty$.

ii. Necht' $x < 0$, pak $-x > 0$ a:

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n+x}{n}\right)^n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\left(\frac{n}{n+x}\right)^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\left(1 + \frac{-x}{n+x}\right)^n} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\left(1 + \frac{1}{\frac{n+x}{-x}}\right)^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\left(1 + \frac{1}{\frac{n+x}{-x}}\right)^{n+x-x}} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\left(1 + \frac{1}{\frac{n+x}{-x}}\right)^{n+x}} \cdot \frac{1}{\left(1 + \frac{1}{\frac{n+x}{-x}}\right)^{-x}} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\left(\left(1 + \frac{1}{\frac{n+x}{-x}}\right)^{\frac{n+x}{-x}}\right)^{-x}} \cdot \frac{1}{\left(1 + \frac{1}{\frac{n+x}{-x}}\right)^{-x}} \\ &= \frac{1}{e^{-x}} \cdot \frac{1}{1^{-x}} = e^x \end{aligned}$$

Využili jsme posloupnost $x_n = \frac{n+x}{-x}$, pro niž platí $x_n \rightarrow \infty$.

iii. Necht' $x = 0$. Pak $a_n = 1$ pro každé $n \in \mathbb{N}$, tedy $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 1 = e^0$.

(g) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n + \sin n}\right)^n$

Řešení:

Použijeme dva policajty

$$\left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^n \leq \left(1 + \frac{1}{n + \sin n}\right)^n \leq \left(1 + \frac{1}{n-1}\right)^n$$

Navíc platí

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{n+1-1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{n+1}}{\left(1 + \frac{1}{n+1}\right)} = \frac{e}{1}$$

a

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n-1}\right)^n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n-1}\right)^{n-1+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n-1}\right)^{n-1} \cdot \left(1 + \frac{1}{n-1}\right) = e$$

Ze dvou policajtů tedy dostáváme

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n + \sin n}\right)^n = e$$

$$(h) \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n+4}{n-2} \right)^{n+1}$$

Řešení:

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n+4}{n-2} \right)^{n+1} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n-2+6}{n-2} \right)^{n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{6}{n-2} \right)^{n-2+3} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{6}{n-2} \right)^3 \cdot \left(1 + \frac{6}{n-2} \right)^{n-2} = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{6}{n-2} \right)^3 \cdot \left(1 + \frac{1}{\frac{n-2}{6}} \right)^{\frac{n-2}{6} \cdot 6} = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{6}{n-2} \right)^3 \cdot \left(\left(1 + \frac{1}{\frac{n-2}{6}} \right)^{\frac{n-2}{6}} \right)^6 \stackrel{VOAL}{=} 1 \cdot e^6 \end{aligned}$$

$$(i) \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n^2-1}{n^2-3} \right)^{n+1}$$

Řešení:

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n^2-1}{n^2-3} \right)^{n+1} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n^2-3+2}{n^2-3} \right)^{n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{2}{n^2-3} \right)^{\frac{n(n+1)}{n}} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\left(1 + \frac{2}{n^2-3} \right)^{n^2-3+3+n}} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\left(1 + \frac{2}{n^2-3} \right)^3} \sqrt[n]{\left(1 + \frac{2}{n^2-3} \right)^n} \sqrt[n]{\left(1 + \frac{2}{n^2-3} \right)^{n^2-3}} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\left(1 + \frac{2}{n^2-3} \right)^3} \sqrt[n]{\left(1 + \frac{2}{n^2-3} \right)^n} \sqrt[n]{\left(\left(1 + \frac{1}{\frac{n^2-3}{2}} \right)^{\frac{n^2-3}{2}} \right)^2} \\ &\stackrel{VOAL}{=} 1 \cdot 1 \cdot 1. \end{aligned}$$

Na poslední limitu užijeme dva policajty, protože

$$\left(\left(1 + \frac{1}{\frac{n^2-3}{2}} \right)^{\frac{n^2-3}{2}} \right)^2 \rightarrow e^2,$$

budou tak od jistého n_0 platit odhady

$$1 \leq \left(\left(1 + \frac{1}{\frac{n^2-3}{2}} \right)^{\frac{n^2-3}{2}} \right)^2 \leq 10.$$

2. Necht' $\{a_n\}$ je posloupnost, $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = A$. Co můžeme říct o $\lim_{n \rightarrow +\infty} (-1)^n a_n$?

Řešení: Limita existuje, právě když $\lim a_n = 0$.

Jestliže $\lim a_n = 0$, potom $\lim(-1)^n a_n = 0$ podle věty o limitě součinu omezené posloupnosti a posloupnosti jdoucí k nule.

Jestliže $\lim a_n = A \neq 0$, pak pro sudé členy máme limitu rovnu A , pro liché členy $-A$. Což je spor s jednoznačností limity.

3. Existují posloupnosti $\{a_n\}$ a $\{b_n\}$ takové, že $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$, $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \infty$ a $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n b_n$ neexistuje?

Řešení: Ano. Např. $a_n = \frac{(-1)^n}{n}$, $b_n = n^2$. Pak $a_n b_n = (-1)^n$.

4. Necht' $\{a_n\}$ je konvergentní posloupnost racionálních čísel. Musí být limita racionální číslo?

Řešení: Ne. Např. posloupnost

$$a_1 = 3$$

$$a_2 = 3,1$$

$$a_3 = 3,14$$

$$a_4 = 3,141$$

$$a_5 = 3,1415$$

$$a_6 = 3,14159$$

$$a_7 = 3,141592$$

$$a_8 = 3,1415926$$

↓

π

5. Necht' $\{a_n\}$ je omezená posloupnost taková, že $a_{n+2} \geq a_n$. Musí mít a_n limitu?

Řešení: Nikoli. Např. $(-1)^n \geq (-1)^{n+2}$.