7. cvičení – růstová škála

https://www2.karlin.mff.cuni.cz/~kuncova/vyuka.php, kuncova@karlin.mff.cuni.cz

Příklady

1. Určete limity

(a) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{3^n+n^2}{n^3+n!}$

Řešení: Vytkneme nejrychlejší člen, tedy $n!$, a použijeme škálu:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{3^n+n^2}{n^3+n!} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{3^n}{n!}+\frac{n^2}{n!}}{\frac{n^3}{n!}+1} \overset{VOAL}{=} \frac{0+0}{0+1} = 0.$$

(b) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{(-2)^n+3^n}{(-2)^{n+1}+3^{n+1}}$

Řešení: Vhodným vytknutím plyne

$$\lim \frac{(-2)^n+3^n}{(-2)^{n+1}+3^{n+1}} = \lim \frac{3^n}{3^{n+1}} \cdot \lim \frac{\left(\frac{-2}{3}\right)^n+1}{\left(\frac{-2}{3}\right)^{n+1}+1} = \frac{1}{3}\cdot\frac{0+1}{0+1} = \frac{1}{3}.$$

(c) $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1^n+2^n+3^n+4^n+5^n}{5,0001^n}$

Řešení: Mohli bychom postupovat vytknutím, ale zde to jde jednodušeji. Limitu roztrhneme pomocí věty o aritmetice limit na pět částí.

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1^n+2^n+3^n+4^n+5^n}{5,0001^n} = \lim_{n\to+\infty} \left(\frac{1}{5,0001}\right)^n + \left(\frac{2}{5,0001}\right)^n +$$

$$+ \left(\frac{3}{5,0001}\right)^n + \left(\frac{4}{5,0001}\right)^n + \left(\frac{5}{5,0001}\right)^n = 0+0+0+0+0 = 0,$$

neboť v každé závorce je koeficient ostře menší než jedna.

(d) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{3^n+n^5+(n+1)!}{n(n^6+n!)}$

Řešení: Nejrychleji ze členů ve zlomku roste faktoriál. Proto

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{3^n+n^5+(n+1)!}{n(n^6+n!)} = \lim_{n\to+\infty} \frac{(n+1)!}{n(n!)} \cdot \frac{\frac{3^n}{n!}+\frac{n^5}{n!}+1}{\frac{n^6}{n!}+1} = \lim_{n\to+\infty} \frac{n+1}{n} \frac{\frac{3^n}{n!}+\frac{n^5}{n!}+1}{\frac{n^6}{n!}+1}$$

$$= 1\cdot\frac{0+0+1}{0+1} = 1.$$

(e) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\ln n+n^3+\frac{1}{n}+e^n+5^n}{\log_{10} n+n^4+5^n+n^3+4^n}$

Řešení: Vytkneme nejrychleji rostoucí člen 5^n:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{5^n}{5^n} \frac{\frac{\ln n}{5^n}+\frac{n^3}{5^n}+\frac{\frac{1}{n}}{5^n}+\frac{e^n}{5^n}+\frac{5^n}{5^n}}{\frac{\log_{10} n}{5^n}+\frac{n^4}{5^n}+\frac{5^n}{5^n}+\frac{n^3}{5^n}+\frac{4^n}{5^n}} \overset{VOAL}{=} \lim_{n\to\infty} \frac{0+0+0+0+1}{0+0+1+0+0} = 1$$

(f) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{(n+2)!+(n+1)!}{(n+2)!-(n+1)!}$

Řešení: Vytkneme $(n+1)!$:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(n+2)!+(n+1)!}{(n+2)!-(n+1)!} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)!}{(n+1)!} \cdot \frac{(n+2)+1}{n+2-1} = \lim_{n\to\infty} \frac{n+3}{n+1} = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{n} \cdot \frac{1+3/n}{1+1/n} \overset{VOAL}{=} 1$$

(g) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{(\log(n^2))^2}{\sqrt{n+5\log^2 n}-\sqrt{n+2\log^2 n}} \cdot \dfrac{1}{\sqrt{n}}$

Řešení: Rozšíříme odmocniny a pak použijeme škálu:

$$\begin{aligned}
&\lim_{n\to\infty} \frac{(\log(n^2))^2}{\sqrt{n+5\log^2 n}-\sqrt{n+2\log^2 n}} \cdot \frac{1}{\sqrt{n}} \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{(\log(n^2))^2(\sqrt{n+5\log^2 n}+\sqrt{n+2\log^2 n})}{n+5\log^2 n - n - 2\log^2 n} \cdot \frac{1}{\sqrt{n}} \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{(2\log n)^2}{3\log^2 n} \cdot \frac{\sqrt{n+5\log^2 n}+\sqrt{n+2\log^2 n}}{\sqrt{n}} \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{4}{3} \cdot \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n}} \cdot \left(\sqrt{1+\frac{5\log^2 n}{n}} + \sqrt{1+\frac{2\log^2 n}{n}}\right) \overset{VOAL}{=} \frac{4}{3} \cdot 2 = \frac{8}{3}
\end{aligned}$$

2. Určete limity

(a) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n^2+2^n+3^n}$

Řešení: Použijeme větičku a budeme zjišťovat $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$, tedy:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^2+2^{n+1}+3^{n+1}}{n^2+2^n+3^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{3^{n+1}}{3^{n+1}} \frac{\frac{(n+1)^2}{3^{n+1}} + (\frac{2}{3})^{n+1} + 1}{\frac{n^2}{3^{n+1}} + \frac{1}{3}(\frac{2}{3}^n) + \frac{1}{3}} = \frac{0+0+1}{0+\frac{1}{3}\cdot 0 + \frac{1}{3}} = 3$$

(b) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{\dfrac{4^n+3^n\sin(2^n)}{5^n+4^n\cos(n!)}}$

Řešení:

Najdeme odhady pro dva policajty.

$$\frac{4^n}{4} \le 4^n - 3^n \le 4^n + 3^n\sin(2^n) \le 4^n + 4^n = 2\cdot 4^n$$

Pak

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{4^n}{4}} \le \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{4^n+3^n\sin(2^n)} \le \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{2\cdot 4^n}.$$

Protože máme

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{4^n}{4}} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{4^n} \cdot \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{4}} = 4$$

a

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{2\cdot 4^n}. \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{2} \cdot \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{4^n} = 4,$$

tak dohromady

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{4^n + 3^n \sin(2^n)} = 4.$$

Jmenovatel odhadneme analogicky

$$\frac{5^n}{5} \leq 5^n - 4^n \leq 5^n + 4^n \cos(n!) \leq 2 \cdot 5^n.$$

Pak

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{5^n}{5}} = 5$$

a

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{2 \cdot 5^n} = 5.$$

Tedy

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{5^n + 4^n \cos(n!)} = 5.$$

Pro původní limitu pak máme

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{4^n + 3^n \sin(2^n)}{5^n + 4^n \cos(n!)}} \overset{VOAL}{=} \frac{\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{4^n + 3^n \sin(2^n)}}{\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{5^n + 4^n \cos(n!)}} = \frac{4}{5}.$$

(c) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a^n + b^n + c^n}$ pro $a, b, c > 0$

Řešení: Bez újmy na obecnosti můžeme předpokládat, že $a \geq b \geq c$. Potom platí, že

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{a^n + b^n + c^n} = \lim_{n\to+\infty} a \cdot \sqrt[n]{1 + (b/a)^n + (c/a)^n} = a$$

podle věty o dvou policajtech, neboť $\sqrt[n]{1} \leq \sqrt[n]{1 + (b/a)^n + (c/a)^n} \leq \sqrt[n]{3}$.

(d) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{\sqrt[n]{a^n + b^n}}{\sqrt[n]{a^{2n} + b^{2n}}} \right)$ pro $a > b > 0$

Řešení: Vytkněme a^n v čitateli a a^{2n} ve jmenovateli. Je $\sqrt[n]{a^{2n}} = a^2$, a tedy

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{\sqrt[n]{a^n + b^n}}{\sqrt[n]{a^{2n} + b^{2n}}} \right) = \lim_{n\to\infty} \frac{a}{a^2} \left(\frac{\sqrt[n]{1 + (b/a)^n}}{\sqrt[n]{1 + (b/a)^{2n}}} \right) = \frac{1}{a} \cdot \frac{1}{1}.$$

Máme totiž $0 < b/a < 1$, a tedy můžeme odhadnout

$$\sqrt[n]{1} \leq \sqrt[n]{1 + (b/a)^n} \leq \sqrt[n]{2}.$$

Podle věty o dvou policajtech jde pak limita k jedné.
Jmenovatele vyřešíme analogicky.

(e) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{\dfrac{((n+2)^2-(n+1)^2)^{n+1}}{((n+1)^3-n^3-3n^2)^{n-1}}}$

Řešení: Upravíme:

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{((n+2)^2-(n+1)^2)^{n+1}}{((n+1)^3-n^3-3n^2)^{n-1}}} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{(n^2+4n+4-(n^2+2n+1))^{n+1}}{(n^3+3n^2+3n+1-n^3-3n^2)^{n-1}}} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{(2n+3)^{n+1}}{(3n+1)^{n-1}}} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{2^{n+1}n^{n+1}(1+3/(2n))^{n+1}}{3^{n-1}n^{n-1}(1+1/(3n))^{n-1}}} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{2^{n+1}}{3^{n-1}}} \cdot \sqrt[n]{\frac{n^{n+1}}{n^{n-1}}} \cdot \sqrt[n]{\frac{(1+3/(2n))^{n+1}}{(1+1/(3n))^{n-1}}} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{6\cdot 2^n}{3^n}} \cdot \sqrt[n]{n^2} \cdot \sqrt[n]{\frac{(1+3/(2n))^{n+1}}{(1+1/(3n))^{n-1}}} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{6}\cdot\frac{2}{3}\cdot \sqrt[n]{n^2}\cdot \sqrt[n]{(1+3/(2n))(1+1/(3n))}\cdot\frac{1+3/(2n)}{1+1/(3n)} = 1\cdot\frac{2}{3}\cdot 1\cdot 1\cdot\frac{1+0}{1+0} = \frac{2}{3}.$$

Platí totiž pro každé $a>0$, k přirozené :

$$\lim \sqrt[n]{a} = 1, \qquad \lim \sqrt[n]{n} = 1 \implies \lim \sqrt[n]{n^k} = 1$$

a také, že

$$1 \le \sqrt[n]{(1+3/2n)(1+1/n)} \le \sqrt[n]{4}$$

a krajní limity jdou k jedné, tudíž podle věty o dvou policajtech také limita prostřední.

(f) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{2\sqrt{n^2+n}-n\cdot\sqrt{4^n+1}}{\sqrt[n]{2^{n^2}+1}}$

Řešení: Upravíme odmocniny a vytkneme nejrychlejší člen

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2\sqrt{n^2+n}-n\cdot\sqrt{4^n+1}}{\sqrt[n]{2^{n^2}+1}} = \lim_{n\to\infty} \frac{4(n^2+n)-n^2(4^n+1)}{\sqrt[n]{2^{n^2}+1}\cdot(2\sqrt{n^2+n}+n\cdot\sqrt{4^n+1})}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{4n^2+4n-4^n n^2-n^2}{\sqrt[n]{2^{n^2}\left(1+\frac{1}{2^{n^2}}\right)}\cdot\left(2\sqrt{n^2(1+\frac{1}{n})}+n\cdot\sqrt{4^n(1+\frac{1}{4^n})}\right)}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{4^n n^2}{2^n\cdot n\cdot 4^{\frac{n}{2}}} \frac{4^{1-n}+\frac{4}{4^n n}-1-4^{-n}}{\sqrt[n]{\left(1+\frac{1}{2^{n^2}}\right)}\cdot\left(\frac{2}{2^n}\sqrt{(1+\frac{1}{n})}+\sqrt{(1+\frac{1}{4^n})}\right)}$$

$$\overset{VOAL}{=} \infty\cdot\frac{0+0-1-0}{1(0+1)} = -\infty$$

3. Spočtěte limity

(a) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{\sqrt{3^n + 2\cdot 2^n} - \sqrt{3^n + 2^n}}$

Řešení: Upravíme odmocniny dle vzorce

$$\sqrt{3^n + 2\cdot 2^n} - \sqrt{3^n + 2^n} = \frac{3^n + 2\cdot 2^n - 3^n - 2^n}{\sqrt{3^n + 2\cdot 2^n} + \sqrt{3^n + 2^n}} = \frac{2^n}{\sqrt{3^n + 2\cdot 2^n} + \sqrt{3^n + 2^n}}$$

Odhadneme jmenovatele:

$$\sqrt{3^n} \leq \sqrt{3^n + 2\cdot 2^n} + \sqrt{3^n + 2^n} \leq 2\sqrt{3^n + 2\cdot 2^n} \leq 2\sqrt{3^n + 2\cdot 3^n} = 2\sqrt{3}\sqrt{3^n}$$

Pro limity dostaneme

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\sqrt{3^n}} = \sqrt{3}$$

a

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{2\sqrt{3}\sqrt{3^n}} = \sqrt{3}.$$

Ze dvou policajtů a aritmetiky limit máme

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{2^n}{\sqrt{3^n + 2\cdot 2^n} + \sqrt{3^n + 2^n}}} = \frac{2}{\sqrt{3}}.$$

(b) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\sqrt[n]{2^n + 3^n}}{\sqrt[2n]{4^n + \sqrt{n}}}$

Řešení: Odhadneme

$$\sqrt[n]{3^n} \leq \sqrt[n]{2^n + 3^n} \leq \sqrt[n]{2\cdot 3^n}$$

Ze dvou policajtů je

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{2^n + 3^n} = 3.$$

Pro jmenovatele

$$\sqrt[2n]{4^n} \leq \sqrt[2n]{4^n + \sqrt{n}} \leq \sqrt[2n]{2\cdot 4^n}.$$

Limity:

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[2n]{4^n} = \lim_{n\to\infty} 4^{\frac{1}{2}} = \sqrt{4},$$

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[2n]{2\cdot 4^n} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\sqrt{2}}\cdot 4^{\frac{1}{2}} = \sqrt{4}.$$

Dohromady

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt[n]{2^n + 3^n}}{\sqrt[2n]{4^n + \sqrt{n}}} = \frac{3}{2}.$$

(c) $\lim\limits_{n\to\infty} (-1)^n \dfrac{n^2 \sqrt[n]{n}}{n^3 + \sqrt[2n]{n}}$

Řešení:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^2 \sqrt[n]{n}}{n^3 + \sqrt[2n]{n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^3}{n^3} \cdot \frac{\frac{\sqrt[n]{n}}{n}}{1 + \frac{\sqrt[2n]{n}}{n^3}} = \frac{0}{1} = 0.$$

Na celkovou limitu použijeme větu o omezené a mizející posloupnosti, tedy

$$\lim_{n\to\infty} (-1)^n \frac{n^2 \sqrt[n]{n}}{n^3 + \sqrt[2n]{n}} = 0.$$

4. Jak to dopadne s posloupnostmi? (Divergentní znamená jak jdoucí do nekonečna, tak oscilující.)

   (a) Nechť posloupnost x_n je konvergentní a posloupnost y_n je divergentní. Je možné říci, že posloupnosti a) $x_n + y_n$, b) $x_n y_n$ jsou také divergentní?
   Řešení: Ano, součet je divergentní. Nemusí být, $x_n = \frac{1}{n}$, $y_n = n$, pak $x_n y_n = 1$, což je konvergentní posloupnost.

   (b) Nechť posloupnosti x_n a y_n jsou divergentní. Je možné říci, že posloupnosti a) $x_n + y_n$, b) $x_n y_n$ jsou také divergentní?
   Řešení: Nemusí být. Např. $x_n = (-1)^n$, $y_n = (-1)^{n+1}$, pak $x_n + y_n = 0$ a $x_n y_n = -1$.

   (c) Nechť $\lim x_n = 0$ a y_n je libovolná posloupnost. Je možné říci, že $\lim(x_n y_n) = 0$?
   Řešení: Nikoli, např $x_n = \frac{1}{n}$ a $y_n = n$. Pak $\lim_{n\to\infty} x_n y_n = 1$.

   (d) Nechť $\lim(x_n y_n) = 0$. Je možné říci, že platí buď $\lim x_n = 0$ nebo $\lim y_n = 0$?
   Řešení: Také ne. Nechť x_n je posloupnost, která má na lichých pozicích 0 a na sudých 1. Naopak nechť y_n má na sudých pozicích 0 a na lichých 1. Pak $\lim_{n\to\infty} x_n y_n = 0$, ale ani jedna posloupnost nemá nulovou limitu.