

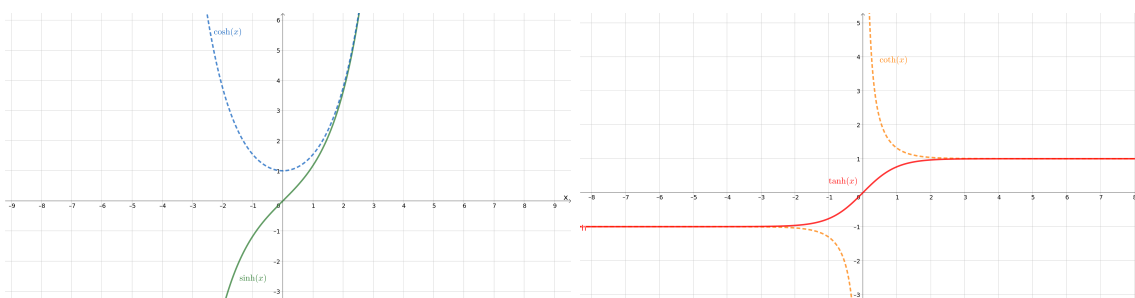


## 5. cvičení – Hyperbolické funkce, supremum, infimum

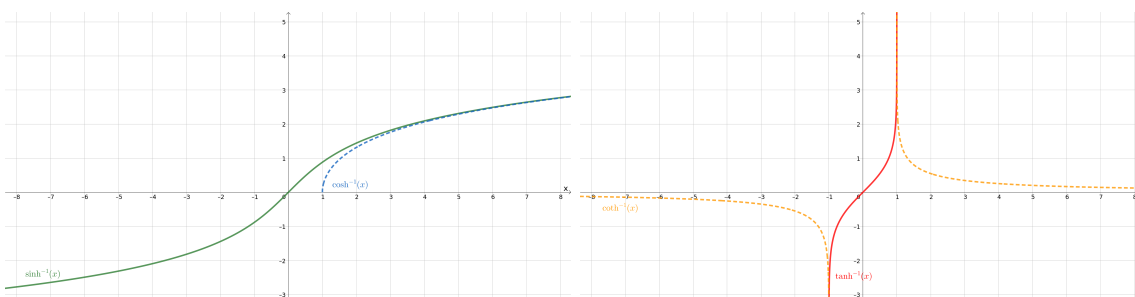
<https://www2.karlin.mff.cuni.cz/~kuncova/vyuka.php>, [kuncova@karlin.mff.cuni.cz](mailto:kuncova@karlin.mff.cuni.cz)

### Hyperbolické funkce

$$\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \quad \tanh x = \frac{\sinh x}{\cosh x} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$$
$$\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \quad \coth x = \frac{\cosh x}{\sinh x} = \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}$$



$$\arg \sinh x = \ln \left( x + \sqrt{x^2 + 1} \right) \quad \arg \tanh x = \frac{1}{2} \ln \left( \frac{1+x}{1-x} \right)$$
$$\arg \cosh x = \ln \left( x + \sqrt{x^2 - 1} \right) \quad \arg \coth x = \frac{1}{2} \ln \left( \frac{x+1}{x-1} \right)$$



### Příklady

1. Ukažte, že

- $\cosh x + \sinh x = e^x$
- $\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$   
(užijte vzorce  $(a-b)(a+b) = a^2 - b^2$ )
- $\cosh 2x = \cosh^2 x + \sinh^2 x$
- $\sinh 2x = 2 \sinh x \cosh x$
- $\cosh x$  je sudá funkce  
( $\cosh(-x) = \cosh(x)$ )
- $\sinh x$  je lichá funkce  
( $\sinh(-x) = -\sinh x$ )
- $\coth x$  je lichá funkce  
(za pomoci (e) a (f))
- $\tanh x$  je lichá funkce
- $\frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x$
- $\frac{1}{\cosh^2 x} = 1 - \tanh^2 x$

2. Vyjádřete:

(a)  $\sinh(\ln 3)$                       (b)  $\cosh(\ln 2)$                       (c)  $\coth\left(\ln \frac{1}{3}\right)$

3. Řešte rovnice s neznámou  $x$  (bez použití arg funkcí):

(a)  $\sinh x = \frac{3}{4}$     (c)  $2 \cosh 2x + 10 \sinh 2x = 5$   
(b)  $\cosh x = \frac{43}{5}$     (d)  $4 \cosh x + \sinh x = 4$

4. Víte-li, že  $\sinh x = \frac{5}{12}$ , určete

(a)  $\cosh x$               (b)  $\coth x$               (c)  $\tanh x$               (d)  $\sinh 2x$               (e)  $\cosh 2x$

5. Ukažte, že  $\arg \sinh x = \ln\left(x + \sqrt{x^2 + 1}\right)$ .

6. Vyjádřete za pomoci logaritmu

(a)  $\arg \sinh \frac{3}{4}$                       (b)  $\arg \cosh 2$                       (c)  $\arg \tanh \frac{1}{2}$

7. Uvažujme  $\theta \in \mathbb{R}$  a položme  $x = 2 \cosh \theta$ . Vyjádřete  $4 \cosh \theta \sinh \theta$ .

### Supremum a infimum

**Definice 1.** Necht'  $M \subset \mathbb{R}$ . Číslo  $s \in \mathbb{R}$  splňující

•  $\forall x \in M: x \leq s$ ,    •  $\forall s' \in \mathbb{R}, s' < s \exists x \in M: x > s'$ ,

nazýváme *supremem* množiny  $M$ .

### Příklady

8. Najděte supremum, infimum, minimum a maximum následujících množin v  $\mathbb{R}$ :

(a)  $\mathbb{N}$     (e)  $\{(-1)^n \sqrt{n}; n \in \mathbb{N}\}$                       (h)  $\left\{\frac{1 + (-1)^n}{2}; n \in \mathbb{N}\right\}$   
(b)  $(0; 2]$     (f)  $\{\arctan x; x \in \mathbb{R}\}$   
(c)  $(0; 1) \cap \mathbb{Q}$     (g)  $\left\{1 - \frac{1}{n}; n \in \mathbb{N}\right\}$                       (i)  $\left\{\cos \frac{n\pi}{2}; n \in \mathbb{N}\right\}$   
(d)  $\{x \in \mathbb{Z}; x \geq -\sqrt{6}\}$                       (j)  $\{(-1)^n n; n \in \mathbb{N}\}$

9. Uveďte příklad množiny, která má supremum, ale nemá maximum. Uveďte příklad množiny, která má infimum, ale nemá minimum.

10. Necht'  $A, B \subset \mathbb{R}$ . Co lze říci o supremu a infimu následujících množin ve vztahu k  $\sup A$ ,  $\sup B$  a  $\inf A$ ,  $\inf B$ ?

(a)  $A \cup B$     (e)  $-A = \{-a, a \in A\}$   
(b)  $A \cap B$     (f)  $A + B = \{a + b, a \in A, b \in B\}$   
(c)  $A \setminus B$     (g)  $A - B = \{a - b, a \in A, b \in B\}$   
(d)  $A \Delta B$     (h)  $A \cdot B = \{a \cdot b, a \in A, b \in B\}$