3. cvičení – Logika a zobrazení

https://www2.karlin.mff.cuni.cz/~kuncova/vyuka.php, kuncova@karlin.mff.cuni.cz

1 Výroky

Úloha 1. Doplňte tabulku výroků

A	B	$\neg A$	$\neg B$	$A \wedge B$	$A \vee B$	$A \Rightarrow B$	$A \Leftrightarrow B$
1	1	0	0	1	1	1	1
1	0	0	1	0	1	0	0
0	1	1	0	0	1	1	0
0	0	1	1	0	0	1	1

Úloha 2. Doplňte tabulku výroků

A	B	$\neg A$	$\neg B$	$\neg(A \wedge B)$	$\neg A \vee \neg B$	$\neg(A \vee B)$	$\neg A \wedge \neg B$
1	1	0	0	0	0	0	0
1	0	0	1	1	1	0	0
0	1	1	0	1	1	0	0
0	0	1	1	1	1	1	1

Úloha 3. Doplňte tabulku výroků

A	B	$\neg A$	$\neg B$	$\neg(A \Rightarrow B)$	$A \wedge \neg B$	$\neg B \Rightarrow \neg A$	$(A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow A)$
1	1	0	0	0	0	1	1
1	0	0	1	1	1	0	0
0	1	1	0	0	0	1	0
0	0	1	1	0	0	1	1

Úloha 4. Sestavte tauotologie z výroků ve cvičení 1.-3. Kolik jste jich našli? **Řešení:**

$$\neg(A \wedge B) \Leftrightarrow \neg(A \vee \neg B)$$

$$\neg(A \vee B) \Leftrightarrow \neg(A \wedge \neg B)$$

$$\neg(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow (A \wedge \neg B)$$

$$(\neg B \Rightarrow \neg A) \Leftrightarrow (A \Rightarrow B)$$

$$((A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow A)) \Leftrightarrow (A \Leftrightarrow B)$$

Úloha 5. Nechť M je množina osob v posluchárně a nechť $W(x,y)$ znamená: osoba $x \in M$ zná příjmení osoby $y \in M$. Přeformulujte následující výroky do češtiny a pak zkoumejte jejich platnost. Plynou některé výroky z ostatních? (Pozn.: x a y mohou být stejné.)

Příklad: $\exists y \in M \, \exists x \in M : W(x,y)$ lze zformulovat jako: existuje alespoň jedna osoba y a jedna osoba x, že x zná příjmení osoby y.

Volněji: je tu alespoň jeden člověk y a jeho kamarád*ka x, který*á ho zná příjmením. Výrok bude nejspíš pravdivý.

1. $\forall x \in M \, \forall y \in M : W(x,y)$

   Úplně všichni v posluchárně se navzájem znají. To nebude pravda.

2. $\forall x \in M \, \exists y \in M : W(x, y)$

   Každý člověk tu zná něčí příjmením. Jelikož x se může rovnat y, tak pravda.

3. $\forall y \in M \, \exists x \in M : W(x, y)$

   Každý tu má někoho, kdo ho zná příjmením. Asi pravda, známe své vlastní příjmení a navíc se navzájem trochu známe (třeba z Albeře).

4. $\exists x \in M \, \forall y \in M : W(x, y)$

   Je tu někdo, kdo zná všechna příjmení. Také nebude pravda.

5. $\exists y \in M \, \forall x \in M : W(x, y)$

   Je tu někdo, jehož příjmení všichni znají. Všichni by měli znát cvičící, takže pravda.

Úloha 6. Uvažujme výrok: Nechť $n \in \mathbb{N}$. Jestliže n^2 je liché, pak n je také liché. Jaké tvrzení budeme dokazovat při důkazu

1. přímo; Jestliže n^2 je liché, pak n je také liché.

2. nepřímo; Jestliže n je sudé, pak n je také sudé.

3. sporem: n^2 je liché a zároveň n je sudé.

Zkuste tvrzení dokázat alespoň jednou metodou.

Řešení: Například nepřímo, tedy dokazujeme výrok

Jestliže n je sudé, pak n je také sudé.

Předpokládejme tedy, že n je sudé. Tedy se dá zapsat jako $n = 2k$, kde $k \in \mathbb{N}$.

Pak $n^2 = (2k)^2 = 2 \cdot (2k)$. Tedy jsme n^2 vyjádřili jako sudé číslo - dělitelné dvěma. Jsme hotovi.

Úloha 7. Dokažte

1. $\forall \varepsilon > 0 \, \exists n_0 \in \mathbb{N} \, \forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_0 : 1/\sqrt{n} < \varepsilon$

   Řešení: Mějme $\varepsilon > 0$. Nejprve najděme takové n_0, že $1/\sqrt{n_0} < \varepsilon$ Tedy

   $$\frac{1}{\sqrt{n_0}} < \varepsilon$$
   $$\frac{1}{\varepsilon} < \sqrt{n_0}$$
   $$\frac{1}{\varepsilon^2} < n_0$$

   Zvolme takové $n_0 \in \mathbb{N}$, že

   $$\frac{1}{\varepsilon^2} < n_0$$

   Pak pro každé $n \geq n_0$ dostaneme

   $$\frac{1}{\varepsilon^2} < n_0 \leq n,$$

   což jsme potřebovali.

2. $\forall k \in \mathbb{N}\, \exists n_0 \in \mathbb{N}\, \forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_0 : \ln n \geq k$

   Řešení: Zvolme $k \in \mathbb{N}$. Budeme hledat takové n_0, že $\ln n_0 \geq k$. Tedy

$$\begin{aligned} \ln n_0 &\geq k \\ n_0 &\geq e^k \end{aligned}$$

   Zvolme tedy takové $n_0 \in \mathbb{N}$, že

$$n_0 \geq e^k$$

   Pak pro každé $n \geq n_0$ dostaneme

$$\begin{aligned} n \geq n_0 &\geq e^k \\ \ln n &\geq \ln e^k \\ \ln n &\geq k, \end{aligned}$$

   což bylo dokázati.

Úloha 8. Znegujte následující výrok a tuto negaci dokažte

1. $\exists A \in \mathbb{R} \forall \varepsilon > 0\, \exists n_0 \in \mathbb{N}\, \forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_0 : |(-1)^n - A| < \varepsilon$

   Řešení: Negace:

$$\forall A \in \mathbb{R} \exists \varepsilon > 0\, \forall n_0 \in \mathbb{N}\, \exists n \in \mathbb{N}, n \geq n_0 : |(-1)^n - A| \geq \varepsilon$$

   Důkaz: fixujme $A \in \mathbb{R}$ a zvolme $\varepsilon = \frac{1}{4}$ (stačí nám najít 1 ε). Fixujme $n_0 \in \mathbb{N}$. Nyní hledáme takové $n \geq n_0$, že $|(-1)^n - A| \geq \frac{1}{4}$.

   Tvrdíme, že lze zvolit buď $n = n_0$ nebo $n = n_0 + 1$ a alespoň pro jedno z nich platí, že $|(-1)^n - A| \geq \frac{1}{4}$.

   Kdyby ne, tak zároveň platí, že

$$|-1 - A| < \frac{1}{4} \text{ a } |1 - A| < \frac{1}{4},$$

   což není možné.

2. $\forall k \in \mathbb{N}\, \exists n_0 \in \mathbb{N}\, \forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_0 : (-1)^n n \geq k$

   Řešení: Negace:

$$\exists k \in \mathbb{N}\, \forall n_0 \in \mathbb{N}\, \exists n \in \mathbb{N}, n \geq n_0 : (-1)^n n < k$$

   Důkaz: Zvolme $k \in$ libovolné, např. $k = 42$. Pak zafixujme $n_0 \in \mathbb{N}$ a hledáme takové $n \geq n_0$, aby $(-1)^n n < k$. Stačí ale vzít libovolné $n \geq n_0$ liché, protože pak

$$(-1)^n n = -n < 42.$$

---

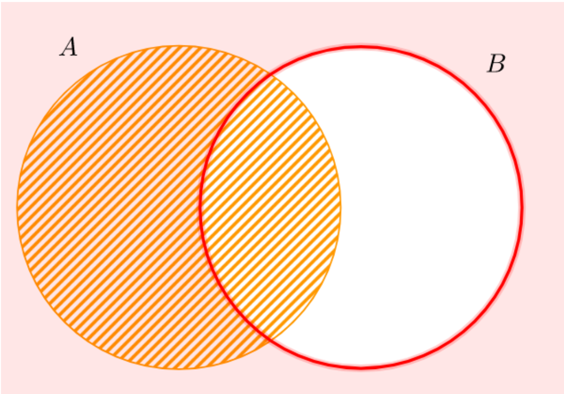
2 Množiny a relace

Úloha 9. Nechť A, B, C jsou množiny. Načrtněte Vennovy diagramy pro

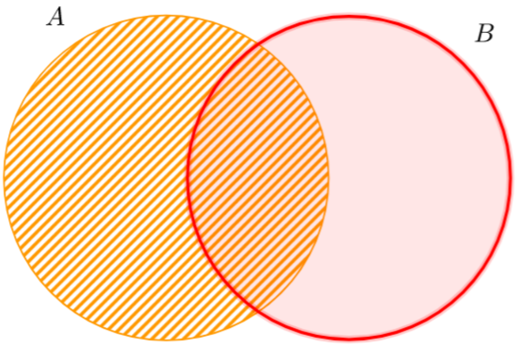
2 Množiny a relace

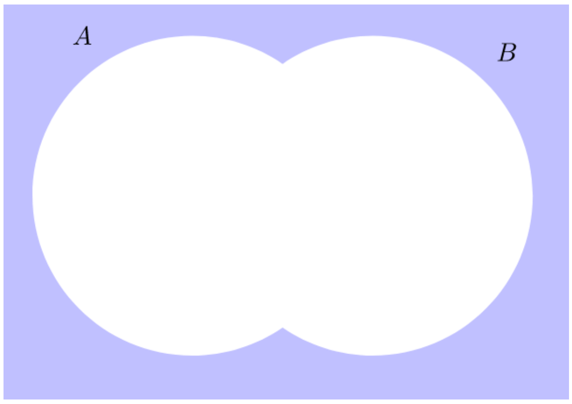
Úloha 9. Nechť A, B, C jsou množiny. Načrtněte Vennovy diagramy pro

1. $A \cap B^c$

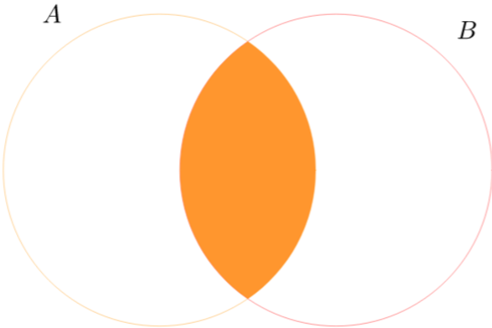


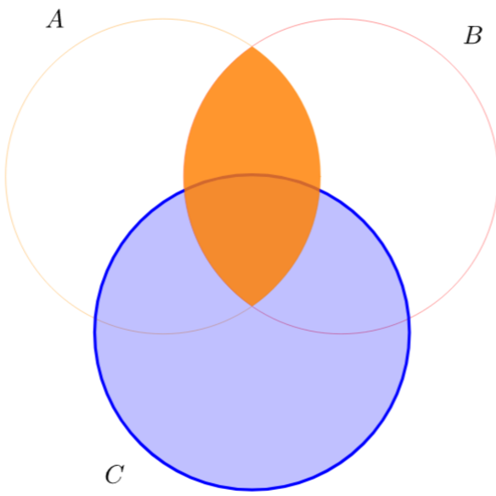
2. $(A \cup B)^c$



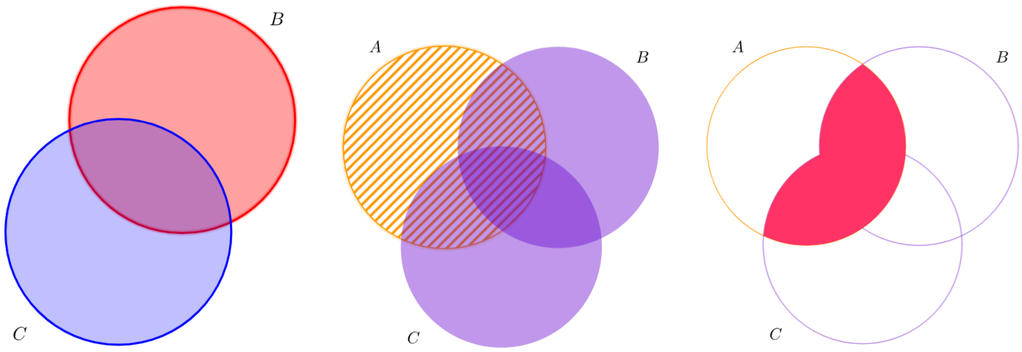


3. $(A \cap B) \cup C$

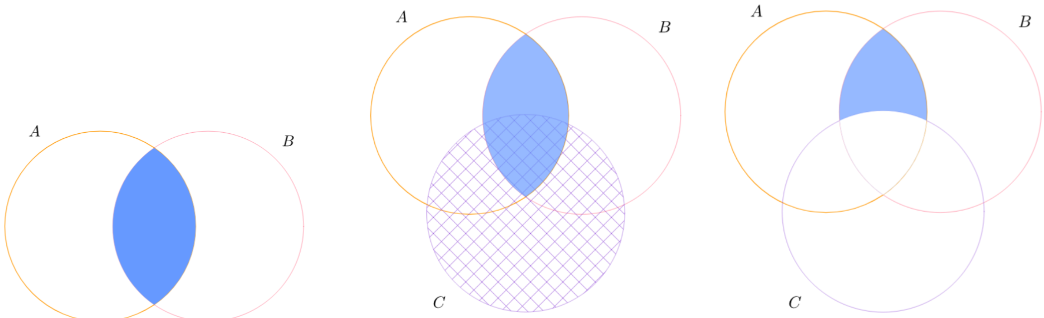




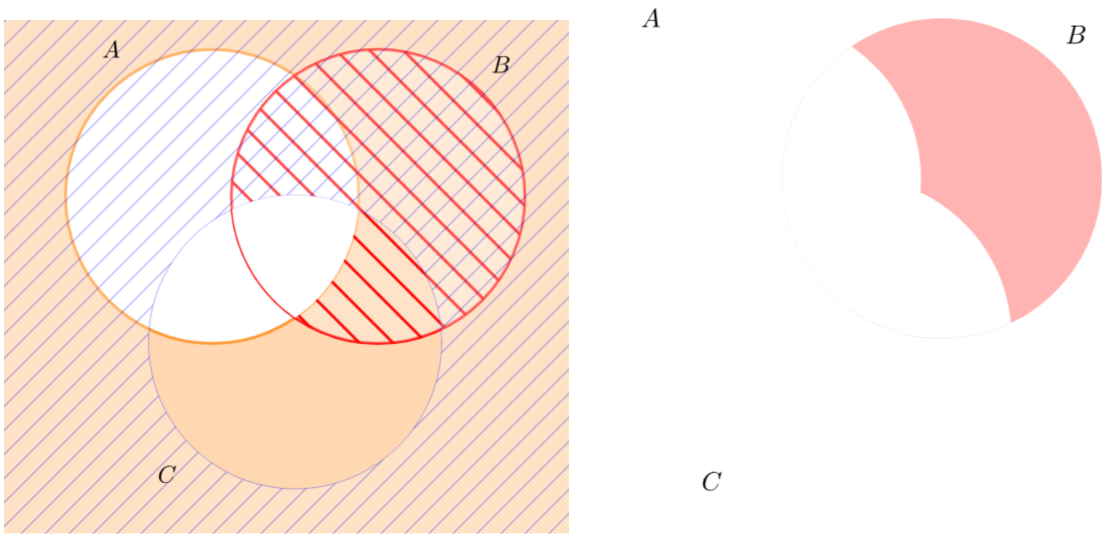
4. $A \cap (B \cup C)$



5. $(A \cap B) \setminus C)$



6. $A^c \cap B \cap C^c)$



Úloha 10. Najděte předpis pro následující diagram

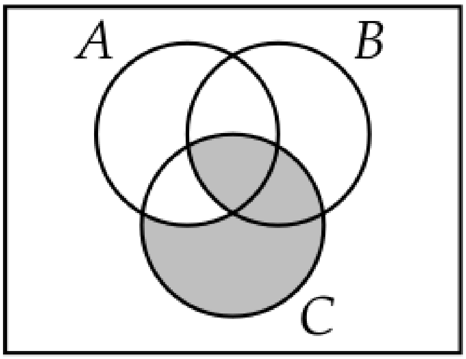


Figure 1: http://discrete.openmathbooks.org/pdfs/dmoi-tablet.pdf

Řešení:
$(B \cap C) \cup (C \cap A^c)$

Úloha 11. Ukažte, že pro symetrický rozdíl $A \Delta B$ množin A a B platí

$$A \Delta B = (A \cup B) \setminus (A \cap B).$$

Řešení:
Potřebujeme ukázat dvě inkluze

- $$(A \cup B) \setminus (A \cap B) \subseteq (A \setminus B) \cup (B \setminus A).$$

  Nechť $x \in (A \cup B) \setminus (A \cap B)$. Bez újmy na obecnosti předpokládejme, že $x \in B$ a zároveň $x \notin A \cap B$.

  Pak $x \in B$, ale $x \notin A$ (protože $x \notin A \cap B$). Tedy $x \in B \setminus A$.

  (Situace $x \in A$ analogicky.)

- $$(A \cup B) \setminus (A \cap B) \supseteq (A \setminus B) \cup (B \setminus A).$$

  Nechť $x \in (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$. Potřebujeme ukázat, že pak $x \in (A \cup B) \setminus (A \cap B)$.

  Bez újmy na obecnosti můžeme předpokládat, že $x \in A$ a zároveň $x \notin B$.

  Pak zjevně $x \in A \subset A \cup B$.

  Zároveň $x \notin B$, tedy $x \notin A \cap B \subset B$.

  (Situace $x \in B$, $x \notin A$ se ukáže analogicky.)

Definice 12. Nechť $A_1, \ldots, A_n$ jsou množiny.

- Jejich *kartézským součinem* rozumíme množinu

  $$A_1 \times \cdots \times A_n = \{[a_1, \ldots, a_n];\ \forall i \in \{1, \ldots, n\} : a_i \in A_i\},$$

  tedy množinu uspořádaných n-tic $[a_1, \ldots, a_n]$.

- *Binární relací* R mezi množinami A a B rozumíme libovolnou podmnožinu kartézského součinu $A \times B$. Často také hovoříme o *relaci mezi* A *a* B nebo o *relaci z* A *do* B. Příslušnost uspořádané dvojice $[a, b]$ do relace R značíme $[a, b] \in R$ nebo aRb.

Úloha 13. Rozhodněte, zda platí následující tvrzení:

1. $A \cap B = A \Leftrightarrow A \subset B$

   Řešení: Pravda.

   "$\Leftarrow$" zjevně

   "$\Rightarrow$": Zvolme $x \in A$. Chceme ukázat, že také $x \in B$.

   Máme: $A \cap B = A$. Tedy máme i $A \cap B \supseteq A$.

   Jinými slovy: jestliže nějaké $x \in A$, pak také $x \in A \ \wedge \ x \in B$. Což jsme ale chtěli.

2. $A \cup B = B \Leftrightarrow A \subset B$

   Řešení: Pravda.

   "$\Leftarrow$" zjevně

   "$\Rightarrow$":

   Zvolme $x \in A$. Chceme ukázat, že také $x \in B$.

   Máme: $A \cup B = B$. Tedy máme i $A \cup B \subseteq B$.

   Jinými slovy: jestliže nějaké $x \in A \vee x \in B$, pak také $x \in B$. Což jsme ale chtěli.

3. $A \setminus B = C \Leftrightarrow A = B \cup C$

   Řešení: Neplatí. Protipříkladem: $B = (0, 2)$, $C = (1, 3)$, $A = (0, 3)$. Pak $A = B \cup C$ ale $A \setminus B = (2, 3) \neq C$.

4. $X \times Y = Y \times X$

   Řešení: Neplatí. Např. množiny $X = \{1, 2, 3\}$ a $Y = \{8, 9\}$. Pak

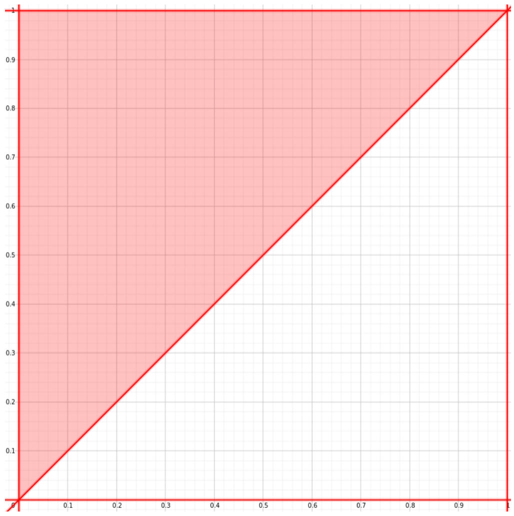
   $$X \times Y = \{[1, 8], [1, 9], [2, 8], [2, 9], [3, 8], [3, 9]\}$$

   ale

   $$X \times Y = \{[8, 1], [8, 2], [8, 3], [9, 1], [9, 2], [9, 3]\}$$

Úloha 14. Nerovnost mezi reálnými čísly „$\leq$“ tvoří binární relaci na $[0,1]$. Znázorněte tuto relaci graficky.

Řešení:



Úloha 15. Nechť A je množina všech podmnožin množiny $\{1,2\}$ a relace R je býti vlastní podmnožinou, tedy $X\,R\,Y$ právě tehdy, když $X \subseteq Y$ a zároveň $X \neq Y$. Napište relaci R jako množinu uspořádaných dvojic.

Řešení: Nejprve rozepíšeme množinu A. Tedy

$$A = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{1,2\}\}$$

Můžeme pak např. říci, že $\emptyset \subset \{1\}$. Nebo $\{1\} \subset \{1,2\}$. Všechny tyto dvojice pak zapíšeme jako relaci

$$R = \{[\emptyset, \{1\}], [\emptyset, \{2\}], [\emptyset, \{1,2\}], [\{1\}, \{1,2\}], [\{2\}, \{1,2\}]\}$$

Definice 16. Nechť R je relace na množině X. Řekneme, že R je

- *symetrická*, jestliže
$$\forall x, y \in X;\ x\,R\,y \Rightarrow y\,R\,x$$
- *antisymetrická*, jestliže
$$\forall x, y \in X;\ x\,R\,y \ \&\ y\,R\,x \Rightarrow x = y$$
- *tranzitivní*, jestliže
$$\forall x, y, z \in X;\ x\,R\,y \ \&\ y\,R\,z \Rightarrow x\,R\,z$$
- *reflexivní*, jestliže
$$\forall x \in X;\ x\,R\,x$$

Úloha 17. Určete, zda následující relace jsou symetrické, antisymetrické, reflexivní a tranzitivní

1. A je množina lidí, R je relace "býti rodičem"

   Řešení: Je antisymetrická, není symetrická, reflexivní, tranzitivní.

2. A je množina celých čísel, $i\,R\,j$ právě tehdy, když $|i-j|=1$.

   Řešení: Je symetrická, není antisymetrická, reflexivní, tranzitivní.

3. $A=\mathbb{N}$, $i\,R\,j$ právě tehdy, když $i\cdot j$ je sudé.

   Řešení: Je symetrická, není antisymetrická, reflexivní, tranzitivní.

---

3 Zobrazení

Definice 18. Binární relaci $F\subset A\times B$ nazýváme *zobrazením* neboli *funkcí* množiny A do množiny B (a zpravidla značíme $F:A\to B$), jestliže platí

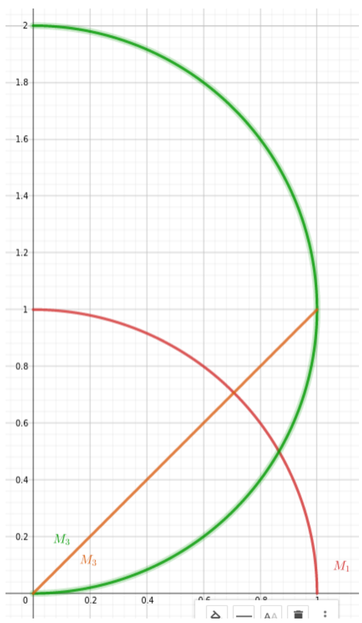
$$\forall x\in A\ \forall y_1,y_2\in B\colon\ \ (([x,y_1]\in F\ \&\ [x,y_2]\in F)\Rightarrow(y_1=y_2)).$$

Jsou-li A,B množiny a $F\subset A\times B$ je zobrazení, pak tento fakt značíme symbolem $F:A\to B$.

Úloha 19. Nechť $A=[0,1]$, $B=[0,2]$. Rozhodněte, která z následujících relací je grafem nějakého zobrazení:

1. $M_1=\{[x,y]\in A\times B;\ x^2+y^2=1\}$
2. $M_2=\{[x,y]\in A\times B;\ y-x=0\}$
3. $M_3=\{[x,y]\in A\times B;\ x^2+(y-1)^2=1\}$

Řešení: Ano, ano, ne



Úloha 20. Ukažte, že skládání zobrazení je asociativní operace, ale není komutativní.

Řešení: Je asociativní, neboli uvažujme zobrazení $f : W \to X$, $g : X \to Y$ a $h : Y \to Z$.

Asociativní: nezáleží na uzávorkování, tedy

$$(h \circ g) \circ f = h \circ (g \circ f)$$

Ale to je pravda, protože

$$(h(g))(f(w)) = h(g(f(w))).$$

Není komutativní: nelze prohodit pořadí. Např. funkce $f = x^2$, $g = 3x$. Pak

$$f(g(x)) = (3x)^2 = 9x^2$$

ale

$$g(f(x)) = 3(x)^2 = 3x^2$$

Definice 21. Nechť A a B jsou množiny a nechť $f : A \to B$ je zobrazení.

- Nechť $M \subset A$. Pak množinu

$$f(M) = \{y \in B;\ \exists x \in M\colon\ f(x) = y\}$$

  nazýváme *obrazem množiny* M při zobrazení f.

- Nechť P je libovolná množina. Pak množinu

$$f^{-1}(P) = \{x \in A;\ f(x) \in P\}$$

  nazýváme *vzorem množiny* P při zobrazení f.

Úloha 22. Nechť $f : X \to Y$ je zobrazení, nechť $A \subset X$ a $B \subset Y$. Platí, že

$$f^{-1}(f(A)) = A, \qquad f(f^{-1}(B)) = B \qquad ?$$

Platí některá z inkluzí $\subset$ či $\supset$?

(7) $f: A \to SPZ$

$g: RA \to RSPZ$

f

?: přidáme "SPZ" → prázdné ?

nebo

$D_f = RA$

$H_f = RSPZ$

prosté, není na

inverz :: (není prosté

g

prosté

na

mohutnost:

$|RA| = |RSPZ|$

inverze

$|RA| = |RSPZ|$ ✓

(8) $f: X \to Y$, $A \subseteq X$, $B \subseteq Y$

VZORY A OBRAZY

(a) $f^{-1}(f(A)) \stackrel{?}{=} A$

NE $f = x^2$ $A = [0,2]$

$f^{-1}(f(A)) = [-2,2]$

(b) $f(f^{-1}(B)) \stackrel{?}{=} B$

NE $B = [-4,4]$

$f^{-1}(B) = [0,2]$

$f(f^{-1}(B)) = [0,4]$

$B \supseteq f(f^{-1}(B))$

(a)

platí $A \subseteq f^{-1}(f(A))$

chci $x \in A \Rightarrow x \in f^{-1}(f(A))$

Sporem: $x \in A$ & $x \notin f^{-1}(f(A))$

↳ $x \in f(A)$ ↳ $\forall y \in f(A): f(x) \neq y$

$= \exists y \in f(A): f(x) = y$ ↯

(b) analogicky $y \in f(f^{-1}(B))$, chci $y \in B$ → sporem: $y \notin B$

↳ $\exists x \in f^{-1}(B): f(x) = y$ & $y \notin B$

→ $f(x) \notin B$

tedy zatím mám: $x \in f^{-1}(B)$ & $f(x) \notin B$ $\exists z \in B$ $f(x) = z \to f(x) \in B$ ↯

Úloha 23. Nechť $f : X \to Y$ je zobrazení. Platí následující tvrzení? Platí alespoň jedna inkluze?

1. Pokud $A, B \subset X$, potom $f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$,
2. Pokud $A, B \subset X$, potom $f(A \cap B) = f(A) \cap f(B)$,
3. Pokud $A, B \subset Y$, potom $f^{-1}(A \cup B) = f^{-1}(A) \cup f^{-1}(B)$,
4. Pokud $A, B \subset Y$, potom $f^{-1}(A \cup B) = f^{-1}(A) \cup f^{-1}(B)$.
5. Pokud $A, B \subset Y$, potom $f^{-1}(A \setminus B) = f^{-1}(A) \setminus f^{-1}(B)$.

Věta 3 Nechť $f: A \to B$, $M_1, M_2 \subset D(f)$, P_1, P_2 lib.

Pak (1) $f(M_1 \cup M_2) = f(M_1) \cup f(M_2)$

(2) $f_{-1}(P_1 \cup P_2) = f_{-1}(P_1) \cup f_{-1}(P_2)$

Dk. (1) "$\subseteq$"

zvolme $y \in f(M_1 \cup M_2)$, chceme $y \in f(M_1) \cup f(M_2)$, což je $y \in f(M_1) \vee y \in f(M_1)$

neb $y \in f(M_1 \cup M_2)$ tak $\exists x \in M_1 \cup M_2 : f(x) = y$

tedy buď $x \in M_1$ v (nevylučovací) nebo $x \in M_2$

(a) $x \in M_1$, pak $y = f(x) \in f(M_1) \subset f(M_1) \cup f(M_2)$

nebo (b) $x \in M_2$ $y = f(x) \in f(M_2) \subset f(M_1) \cup f(M_2)$

"$\supseteq$" zvolme $y \in f(M_1) \cup f(M_2)$

pak $y \in f(M_1) \vee y \in f(M_2)$

nechť (a) $y \in f(M_1)$, tedy $\exists x \in M_1 : y = f(x)$.

pak $x \in M_1 \cup M_2$

tedy $y = f(x) \in f(M_1 \cup M_2)$.

(b) $y \in f(M_2)$, tedy $\exists x \in M_2 : y = f(x)$.

zbytek stejně.

(2) "$\subseteq$"

zvolme $x \in f_{-1}(P_1 \cup P_2)$, chceme $x \in f_{-1}(P_1) \cup f_{-1}(P_2)$

což jest $x \in f_{-1}(P_1) \vee f_{-1}(P_2)$

k tomuto x $\exists y \in P_1 \cup P_2$ tak, že $f(x) = y$

pak

$y \in P_1$ a tedy $x \in f_{-1}(P_1)$

nebo $y \in P_2$ $x \in f_{-1}(P_2)$.

"$\supseteq$" zvolme $x \in f_{-1}(P_1) \cup f_{-1}(P_2)$

Pak pro $x \in f_{-1}(P_1)$ $\exists y \in P_1 : f(x) = y$

ale pak $y \in P_1 \cup P_2$ a $x \in f_{-1}(P_1 \cup P_2)$

nebo $x \in f_{-1}(P_2) : \exists y \in P_2 : f(x) = y$

pak $y \in P_2 \cup P_1$ a $x \in f_{-1}(P_1 \cup P_2)$

<u>Věta</u> 3 $f: A \to B$, $M_1, M_2 \subset D(f)$, P_1, P_2 lib

(3) $f(M_1 \cap M_2) \subset f(M_1) \cap f(M_2)$

(4) $f_{-1}(P_1 \cap P_2) = f_{-1}(P_1) \cap f_{-1}(P_2)$

(5) $f(M_1 \setminus M_2) \supset f(M_1) \setminus f(M_2)$

(6) $f_{-1}(P_1 \setminus P_2) = f_{-1}(P_1) \setminus f_{-1}(P_2)$

<u>Dk</u>. (3) zvolme $y \in f(M_1 \cap M_2)$, chceme $y \in f_1(M_1) \cap f(M_2)$

tedy $y \in f_1(M_1)$ & $y \in f(M_2)$

neb $y \in f(M_2 \cap M_1)$ tak $\exists x \in M_1 \cap M_2 : f(x) = y$

neb $x \in M_1$, tak $y = f(x) \in f(M_1)$

& $x \in M_2$ $y = f(x) \in f(M_2)$,

což jsme chtěli

(4) "$\subseteq$"

zvolme $x \in f_{-1}(P_1 \cap P_2)$, chceme $x \in f_{-1}(P_1) \cap f_{-1}(P_2)$

$\iff x \in f_{-1}(P_1)$ & $x \in f_{-1}(P_2)$

pak $\exists y \in P_1 \cap P_2 :$ $f(x) = y$

ale pak $y \in P_1$ $f(x) = y$ tedy $x \in f_{-1}(P_1)$

& $y \in P_2$ $x \in f_{-1}(P_2)$

"$\supseteq$"

nechť $x \in f_{-1}(P_1) \cap f_{-1}(P_2)$ chceme $x \in f_{-1}(P_1 \cap P_2)$

pak $\exists y \in P_1$ $f(x) = y$

$\exists z \in P_2$ $f(x) = z$

ale f je zobrazení, tedy $y = z$, tedy $\exists y \in P_1 \cap P_2 :$

$f(x) = y$. $\square$

(5) nechť $y \in f(M_1) \setminus f(M_2)$, chceme $y \in f(M_1 \setminus M_2)$

tedy $\exists x \in M_1 : f(x) = y$

ale $\forall t \in M_2$ $f(t) \neq y$

pak $x \notin M_2$. Tedy $x \in M_1 \setminus M_2$ a $f(x) = y$ $\square$

(b) "$\subseteq$"

zvolme $x \in f_{-1}(P_1 \setminus P_2)$, chceme $x \in f_{-1}(P_1) \setminus f_{-1}(P_2)$

tedy $\exists\, y \in P_1 \setminus P_2 : \quad f(x) = y$

zjevně pak $y \in P_1$ a $x \in f_{-1}(P_1)$

ukažme, že $x \notin f_{-1}(P_2)$. kdyby ano, pak

$\exists\, z \in P_2 : \quad f(x) = z$

ale pak $y = f(x) = z$ ↯

"$\supseteq$"

necť $x \in f_{-1}(P_1) \setminus f_{-1}(P_2)$. chceme $x \in f_{-1}(P_1 \setminus P_2)$.

pak $\exists\, y \in P_1 : \quad f(x) = y$

$\forall z \in P_2 : \quad f(x) \neq z$

pak $y \in P_1 \setminus P_2$ a $x \in f_{-1}(P_1 \setminus P_2)$

Definice 24. Nechť A a B jsou množiny a nechť $f : A \to B$ je zobrazení.

(1) Řekneme, že f je *prosté* (*injektivní*), jestliže

$$\forall x, y \in A\colon\ (f(x) = f(y) \ \Rightarrow\ x = y).$$

(2) Řekneme, že f je *„na“* (*surjektivní*), jestliže

$$\forall y \in B\ \exists x \in A\colon\ f(x) = y.$$

(3) Řekneme, že f je *bijekce* (*vzájemně jednoznačné*), jestliže je zároveň prosté a „na“.

Úloha 25. Nechť $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ je zobrazení definované vzorcem $f(x) = x^2$. Určete vzory a obrazy množin $[0, 4]$, $[-4, 0]$ a $[-4, 4]$. Je zobrazení f prosté, na? Existuje inverzní zobrazení? Změní se tyto odpovědi, když budeme brát zobrazení $g : [0, 1] \to [0, 1]$ dané stejným předpisem $g(x) = x^2$?

(4)(a) $X \times Y \neq Y \times X$

neb $\{1,2,3\} \times \{0,-1\} \neq \{0,-1\} \times \{1,2,3\}$

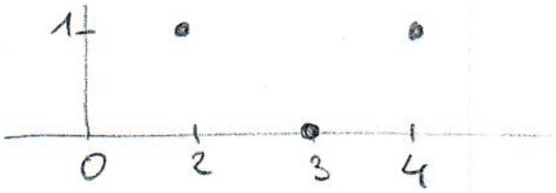
$[1,0], [1,-1], [2,0] \dots$ $\quad$ $[0,1], [0,2], [0,3] \dots$

(5) $p(x) \to$ mna podmnožin

když je něco podmna, lze znázornit funkcí $\begin{cases} 1 & \text{je tam} \\ 0 & \text{není} \end{cases}$

tedy pro $X = \{2,3,4\}$

se podmna $\{2,4\}$ znázorní



tedy $\forall x \in X$ lze přiřadit buď 0 nebo 1 (tedy 2 možnosti). A jejich počet je $2^{|X|}$

(6) $f(x) = x^2$, $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

mna	obraz
$[0,4]$	$[0,16]$
$[-4,0]$	$[0,16]$
$[-4,4]$	$[0,16]$

f není prosté
nemá invers

mna	vzor
$[0,4]$	$[-2,2]$
$[-4,0]$	$\{0\}$
$[-4,4]$	$[-2,2]$

g  je prosté, má invers

Úloha 26. Najděte zobrazení, která zobrazují:

1. interval $[0, 1]$ na interval $[0, \infty)$,
2. interval $(0, 1)$ na interval $[0, 1]$,
3. interval $[a, b]$ na interval $[0, 1]$.

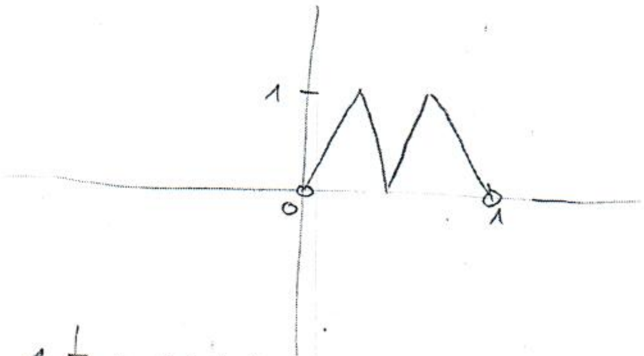
(10) $f(x) = \sin x \qquad g(x) = x^2$

paž $\quad \sin^2 x \neq \sin x^2$

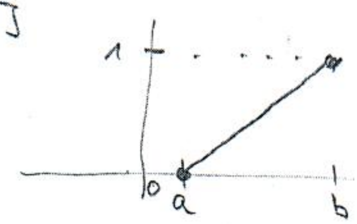
(11) (a) $[0,1]$ na $[0,\infty)$

$$f(x) = \begin{cases} \operatorname{tg} \frac{\pi}{2} \cdot x & x \in [0,1) \\ 0 & x = 1 \end{cases}$$

(b) $(0,1)$ na $[0,1]$



(c) $[a,b]$ na $[0,1]$



$y = px + q$

$$\begin{cases} 0 = pa + q \\ 1 = pb + q \end{cases}$$

paž $\quad -1 = p(a-b) \qquad p = \dfrac{1}{b-a}$

$$q = \frac{-1}{b-a} \cdot a$$

celkem $\qquad f(x) = \dfrac{1}{b-a} \cdot x + \dfrac{-a}{b-a}$