



3. cvičení – Logika a zobrazení

<https://www2.karlin.mff.cuni.cz/~kuncova/vyuka.php>, kuncova@karlin.mff.cuni.cz

1 Výroky

Úloha 1. Doplňte tabulku výroků

| A | B | $\neg A$ | $\neg B$ | $A \wedge B$ | $A \vee B$ | $A \Rightarrow B$ | $A \Leftrightarrow B$ |
|-----|-----|----------|----------|--------------|------------|-------------------|-----------------------|
| 1 | 1 | | | | | | |
| 1 | 0 | | | | | | |
| 0 | 1 | | | | | | |
| 0 | 0 | | | | | | |

Úloha 2. Doplňte tabulku výroků

| A | B | $\neg A$ | $\neg B$ | $\neg(A \wedge B)$ | $\neg A \vee \neg B$ | $\neg(A \vee B)$ | $\neg A \wedge \neg B$ |
|-----|-----|----------|----------|--------------------|----------------------|------------------|------------------------|
| 1 | 1 | | | | | | |
| 1 | 0 | | | | | | |
| 0 | 1 | | | | | | |
| 0 | 0 | | | | | | |

Úloha 3. Doplňte tabulku výroků

| A | B | $\neg A$ | $\neg B$ | $\neg(A \Rightarrow B)$ | $A \wedge \neg B$ | $\neg B \Rightarrow \neg A$ | $(A \Leftarrow B) \wedge (B \Rightarrow A)$ |
|-----|-----|----------|----------|-------------------------|-------------------|-----------------------------|---|
| 1 | 1 | 0 | 0 | | | | |
| 1 | 0 | 0 | 1 | | | | |
| 0 | 1 | 1 | 0 | | | | |
| 0 | 0 | 1 | 1 | | | | |

Úloha 4. Sestavte tautologie z výroků ve cvičení 1.-3. Kolik jste jich našli?

Úloha 5. Nechť M je množina osob v posluchárně a nechť $W(x, y)$ znamená: osoba $x \in M$ zná příjmení osoby $y \in M$. Přeformulujte následující výroky do češtiny a pak zkoumejte jejich platnost. Plynou některé výroky z ostatních? (Pozn.: x a y mohou být stejné.)

Příklad: $\exists y \in M \exists x \in M : W(x, y)$ lze zformulovat jako: existuje alespoň jedna osoba y a jedna osoba x , že x zná příjmení osoby y .

Volněji: je tu alespoň jeden člověk y a jeho kamarád*ka x , který*á ho zná příjmením. Výrok bude nejspíš pravdivý.

- $\forall x \in M \forall y \in M : W(x, y)$
- $\forall x \in M \exists y \in M : W(x, y)$
- $\forall y \in M \exists x \in M : W(x, y)$
- $\exists x \in M \forall y \in M : W(x, y)$
- $\exists y \in M \forall x \in M : W(x, y)$

Úloha 6. Uvažujme výrok: Nechť $n \in \mathbb{N}$. Jestliže n^2 je liché, pak n je také liché. Jaké tvrzení budeme dokazovat při důkazu

- přímo;
- nepřímo;
- sporem?

Zkuste tvrzení dokázat alespoň jednou metodou.

Úloha 7. Dokažte

1. $\forall \varepsilon > 0 \exists n_0 \in \mathbb{N} \forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_0 : 1/\sqrt{n} < \varepsilon$
2. $\forall k \in \mathbb{N} \exists n_0 \in \mathbb{N} \forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_0 : \ln n \geq k$

Úloha 8. Znegujte následující výrok a tuto negaci dokažte

1. $\exists A \in \mathbb{R} \forall \varepsilon > 0 \exists n_0 \in \mathbb{N} \forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_0 : |(-1)^n - A| < \varepsilon$
2. $\forall k \in \mathbb{N} \exists n_0 \in \mathbb{N} \forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_0 : (-1)^n n \geq k$

2 Množiny a relace

Úloha 9. Necht A, B, C jsou množiny. Načrtněte Vennovy diagramy pro

- | | | |
|-------------------|------------------------|-----------------------------|
| 1. $A \cap B^c$ | 3. $(A \cap B) \cup C$ | 5. $(A \cap B) \setminus C$ |
| 2. $(A \cup B)^c$ | 4. $A \cap (B \cup C)$ | 6. $A^c \cap B \cap C^c$ |

Úloha 10. Najděte předpis pro následující diagram

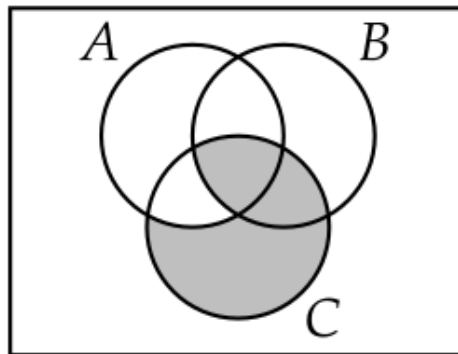


Figure 1: <http://discrete.openmathbooks.org/pdfs/dmoi-tablet.pdf>

Úloha 11. Ukažte, že pro symetrický rozdíl $A \Delta B$ množin A a B platí

$$A \Delta B = (A \cup B) \setminus (A \cap B).$$

Pozn.: symetrický rozdíl je definován jako

$$A \Delta B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A).$$

Definice 12. Necht A_1, \dots, A_n jsou množiny.

- Jejich *kartézským součinem* rozumíme množinu

$$A_1 \times \cdots \times A_n = \{[a_1, \dots, a_n]; \forall i \in \{1, \dots, n\}: a_i \in A_i\},$$

tedy množinu uspořádaných n -tic $[a_1, \dots, a_n]$.

- *Binární relací* R mezi množinami A a B rozumíme libovolnou podmnožinu kartézského součinu $A \times B$. Často také hovoříme o *relaci mezi* A a B nebo o *relaci z* A *do* B . Příslušnost uspořádané dvojice $[a, b]$ do relace R značíme $[a, b] \in R$ nebo aRb .

Úloha 13. Rozhodněte, zda platí následující tvrzení:

1. $A \cap B = A \Leftrightarrow A \subset B$
2. $A \cup B = B \Leftrightarrow A \subset B$
3. $A \setminus B = C \Leftrightarrow A = B \cup C$
4. $X \times Y = Y \times X$

Úloha 14. Nerovnost mezi reálnými čísly „ \leq “ tvoří binární relaci na $[0, 1]$. Znázorněte tuto relaci graficky.

Úloha 15. Nechť A je množina všech podmnožin množiny $\{1, 2\}$ a relace R je být vlastní podmnožinou, tedy $X R Y$ právě tehdy, když $X \subsetneq Y$ a zároveň $X \neq Y$. Napište relaci R jako množinu uspořádaných dvojic.

Definice 16. Nechť R je relace na množině X . Řekneme, že R je

- *symetrická*, jestliže $\forall x, y \in X; x R y \Rightarrow y R x$
- *antisymetrická*, jestliže $\forall x, y \in X; x R y \& y R x \Rightarrow x = y$
- *tranzitivní*, jestliže $\forall x, y, z \in X; x R y \& y R z \Rightarrow x R z$
- *reflexivní*, jestliže $\forall x \in X; x R x$

Úloha 17. Určete, zda následující relace jsou symetrické, antisymetrické, reflexivní a tranzitivní

1. A je množina lidí, R je relace "býti rodičem"
2. A je množina celých čísel, $i R j$ právě tehdy, když $|i - j| = 1$.
3. $A = \mathbb{N}$, $i R j$ právě tehdy, když $i \cdot j$ je sudé.

3 Zobrazení

Definice 18. Binární relaci $F \subset A \times B$ nazýváme *zobrazením* neboli *funkcí* množiny A do množiny B (a zpravidla značíme $F : A \rightarrow B$), jestliže platí

$$\forall x \in A \forall y_1, y_2 \in B: (([x, y_1] \in F \& [x, y_2] \in F) \Rightarrow (y_1 = y_2)).$$

Jsou-li A, B množiny a $F \subset A \times B$ je zobrazení, pak tento fakt značíme symbolem $F : A \rightarrow B$.

Úloha 19. Nechť $A = [0, 1]$, $B = [0, 2]$. Rozhodněte, která z následujících relací je grafem nějakého zobrazení:

1. $M_1 = \{[x, y] \in A \times B; x^2 + y^2 = 1\}$
2. $M_2 = \{[x, y] \in A \times B; y - x = 0\}$

$$3. M_3 = \{[x, y] \in A \times B; x^2 + (y - 1)^2 = 1\}$$

Úloha 20. Ukažte, že skládání zobrazení je asociativní operace, ale není komutativní.

Definice 21. Necht' A a B jsou množiny a necht' $f : A \rightarrow B$ je zobrazení.

- Necht' $M \subset A$. Pak množinu

$$f(M) = \{y \in B; \exists x \in M: f(x) = y\}$$

nazýváme *obrazem množiny* M při zobrazení f .

- Necht' P je libovolná množina. Pak množinu

$$f^{-1}(P) = \{x \in A; f(x) \in P\}$$

nazýváme *vzorem množiny* P při zobrazení f .

Úloha 22. Necht' $f : X \rightarrow Y$ je zobrazení, necht' $A \subset X$ a $B \subset Y$. Platí, že

$$f^{-1}(f(A)) = A, \quad f(f^{-1}(B)) = B \quad ?$$

Platí některá z inkluzí \subset či \supset ?

Úloha 23. Necht' $f : X \rightarrow Y$ je zobrazení. Platí následující tvrzení? Platí alespoň jedna inkluze?

1. Pokud $A, B \subset X$, potom $f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$,
2. Pokud $A, B \subset X$, potom $f(A \cap B) = f(A) \cap f(B)$,
3. Pokud $A, B \subset Y$, potom $f^{-1}(A \cup B) = f^{-1}(A) \cup f^{-1}(B)$,
4. Pokud $A, B \subset Y$, potom $f^{-1}(A \cap B) = f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B)$.
5. Pokud $A, B \subset Y$, potom $f^{-1}(A \setminus B) = f^{-1}(A) \setminus f^{-1}(B)$.

Definice 24. Necht' A a B jsou množiny a necht' $f : A \rightarrow B$ je zobrazení.

- (1) Řekneme, že f je *prosté (injektivní)*, jestliže

$$\forall x, y \in A: (f(x) = f(y) \Rightarrow x = y).$$

- (2) Řekneme, že f je „*na*“ (*surjektivní*), jestliže

$$\forall y \in B \exists x \in A: f(x) = y.$$

- (3) Řekneme, že f je *bijekce (vzájemně jednoznačné)*, jestliže je zároveň prosté a „*na*“.

Úloha 25. Necht' $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ je zobrazení definované vzorcem $f(x) = x^2$. Určete vzory a obrazy množin $[0, 4]$, $[-4, 0]$ a $[-4, 4]$.

Je zobrazení f prosté, *na*? Existuje inverzní zobrazení? Změní se tyto odpovědi, když budeme brát zobrazení $g : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ dané stejným předpisem $g(x) = x^2$?

Úloha 26. Najděte zobrazení, která zobrazují:

1. interval $[0, 1]$ na interval $[0, \infty)$,
2. interval $(0, 1)$ na interval $[0, 1]$,
3. interval $[a, b]$ na interval $[0, 1]$.