2. cvičení – Rovnice, Indukce

https://www2.karlin.mff.cuni.cz/~kuncova/vyuka.php, kuncova@karlin.mff.cuni.cz

Příklady

1. Nalezněte všechna $x \in \mathbb{R}$, pro která platí:

(a) $\log_{10} x = 3$

Řešení:

$$\begin{aligned} \log_{10} x &= \log_{10} 10^3 \\ x &= 10^3 \\ x &= 1000 \end{aligned}$$

(b) $\log_{10} x = \dfrac{-1}{4}$

Řešení:

$$\begin{aligned} \log_{10} x &= \log_{10} 10^{-1/4} \\ x &= 10^{-1/4} \\ x &= \frac{1}{10^{1/4}} \\ x &= \frac{1}{\sqrt[4]{10}} \end{aligned}$$

(c) $\log_2 x = 6$

Řešení:

$$\begin{aligned} \log_2 x &= \log_2 2^6 \\ x &= 2^6 \\ x &= 64 \end{aligned}$$

(d) $2^x = 4$

Řešení:

$$\begin{aligned} 2^x &= 2^2 \\ x &= 2 \end{aligned}$$

(e) $2^x = \dfrac{1}{2}$

Řešení:

$$\begin{aligned} 2^x &= 2^{-1} \\ x &= -1 \end{aligned}$$

(f) $2^x = 3$

Řešení:

$$\begin{aligned} 2^x &= 3 \\ e^{x \ln 2} &= e^{\ln 3} \\ x \ln 2 &= \ln 3 \\ x &= \frac{\ln 3}{\ln 2} \end{aligned}$$

(g) $\cos x = \dfrac{1}{2}$

Řešení:

$$x = \frac{\pi}{3} + 2k\pi$$
$$x = -\frac{\pi}{3} + 2k\pi$$

$k \in \mathbb{Z}$

(h) $\cos x = 3$

Řešení: nemá řešení

(i) $\sin x = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$

Řešení:

$$x = \frac{\pi}{4} + 2k\pi$$
$$x = \frac{3\pi}{4} + 2k\pi$$

$k \in \mathbb{Z}$

2. Nalezněte všechna $x \in \mathbb{R}$, pro která platí:

(a) $\log_{10} x + \dfrac{8}{\log_{10} x} = 6$

Řešení: Podmínky: $\log_{10} x \neq 0$.

Substituce $t = \log_{10} x$.

$$t + \frac{8}{t} = 6, \quad t \neq 0$$
$$t^2 + 8 - 6t = 0$$
$$(t-2)(t-4) = 0$$

Tedy $t_1 = 2$, $t_2 = 4$. Pak

$$\log_{10} x = 2$$
$$10^{\log_{10} x} = 10^2$$
$$x = 100$$

a

$$\log_{10} x = 4$$
$$10^{\log_{10} x} = 10^4$$
$$x = 10000$$

Závěr: $x_1 = 100$, $x_2 = 10000$.

(b) $3^x - 1 = 1 - 3^{-x}$

Řešení: Přepíšeme jako

$$3^x - 1 = 1 - \frac{1}{3^x}$$

Substituce $t = 3^x$. Pak

$$t - 2 = -\frac{1}{t}, \quad t \neq 0$$
$$t^2 - 2t + 1 = 0$$
$$(t-1)^2 = 0$$
$$t = 1$$

Tedy

$$\begin{aligned} 1 &= 3^x \\ x &= 0. \end{aligned}$$

(c) $4\cos^2 x + 3 = 8\cos x$

Řešení: Substituce $t = \cos x$:

$$4t^2 + 3 - 8t$$

Pak

$$t_{1,2} = \frac{8 \pm \sqrt{16}}{8}$$

Tedy $t_1 = \frac{3}{2}$, $t_2 = \frac{1}{2}$. První možnost nemůže nastat, protože $\cos x \leq 1$. Jinak dostáváme

$$\cos x = \frac{1}{2},$$

tedy $x = \frac{\pi}{3} + 2k\pi$, $x = -\frac{\pi}{3} + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

(d) $3 \cdot 2^{2x} + 8 \cdot 2^x = 3$

Řešení: Upravíme

$$3(2^x)^2 + 8 \cdot 2^x - 3 = 0$$

Substituce $t = 2^x$:

$$3t^2 + 8t - 3 = 0$$

Pak $t_1 = \frac{1}{3}$, $t_2 = -3$. Tedy

$$\begin{aligned} 2^x &= \frac{1}{3} \\ e^{x\ln 2} &= e^{\ln\frac{1}{3}} \\ x\ln 2 &= \ln\frac{1}{3} \\ x &= \frac{\ln\frac{1}{3}}{\ln 2} \\ x &= \frac{-\ln 3}{\ln 2} \end{aligned}$$

Možnost $2^x = -3$ nemůže nastat.

(e) $\log_{10} x + \dfrac{4}{\log_{10} x} = 4$

Řešení: Substituce $t = \log_{10} x$,

$$\begin{aligned} t + \frac{4}{t} &= 4, \qquad t \neq 0 \\ t^2 - 4t + 4 &= 0 \\ (t-2)^2 &= 0 \\ t &= 2 \end{aligned}$$

Pak $x = 100$.

Indukce

3. Nechť $n \in \mathbb{N}$. Matematickou indukcí dokažte, že

   (a) $\sum_{k=1}^{n} k^2 = 1^2 + 2^2 + \cdots n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$
   Řešení:

   - Krok 1: pro $n = 1$:
   $$1^2 = \frac{1(1+1)(2\cdot 1+1)}{6}$$
   - Krok 2: předpokládejme, že pro pevné $n \in \mathbb{N}$ platí
   $$\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$
   - Krok 3: chceme tvrzení ukázat pro $n+1$. Neboli chceme ukázat, že
   $$\sum_{k=1}^{n+1} k^2 = \frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6}$$

   Máme
   $$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n+1} k^2 &= \left[\sum_{k=1}^{n} k^2\right] + (n+1)^2 \overset{\text{ind. př}}{=} \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + (n+1)^2 \\ &= \frac{(n+1)[n(2n+1) + 6(n+1)]}{6} \\ &= \frac{(n+1)[2n^2+7n+6]}{6} = \frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6}\end{aligned}$$

   (b) $\sum_{k=1}^{n} k(k+1) = 1\cdot 2 + 2\cdot 3 + \cdots + n(n+1) = \frac{1}{3}n(n+1)(n+2)$
   Řešení:

   - Krok 1: pro $n = 1$:
   $$1(1+1) = \frac{1}{3}\cdot 1(1+1)(1+2)$$
   - Krok 2: předpokládejme, že pro pevné $n \in \mathbb{N}$ platí
   $$\sum_{k=1}^{n} k(k+1) = \frac{1}{3}n(n+1)(n+2)$$
   - Krok 3: chceme tvrzení ukázat pro $n+1$. Tedy chceme ukázat
   $$\sum_{k=1}^{n+1} k(k+1) = \frac{1}{3}(n+1)(n+2)(n+3)$$

   Máme
   $$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n+1} k(k+1) &= \left(\sum_{k=1}^{n} k(k+1)\right) + (n+1)(n+2) \\ &\overset{\text{ind. př}}{=} \frac{1}{3}n(n+1)(n+2) + (n+1)(n+2)\frac{1}{3}\cdot 3 = \frac{1}{3}(n+1)(n+2)(n+3).\end{aligned}$$

(c) $\sum_{k=1}^{n} k^3 = 1^3 + 2^3 + \cdots n^3 = (1 + 2 + \cdots + n)^2$

Řešení:

- Krok 1: pro $n = 1$:
$$1^3 = 1^2$$
- Krok 2: předpokládejme, že pro pevné $n \in \mathbb{N}$ platí
$$\sum_{k=1}^{n} k^3 = (1 + 2 + \cdots + n)^2$$
- Krok 3: chceme tvrzení ukázat pro $n + 1$. Neboli chceme
$$\sum_{k=1}^{n+1} k^3 = (1 + 2 + \cdots + n + n + 1)^2$$

  Tedy
$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n+1} k^3 &= \left(\sum_{k=1}^{n} k^3\right) + (n+1)^3 \overset{\text{ind. př}}{=} (1 + 2 + \cdots + n)^2 + (n+1)^3 \\ &= \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2 + (n+1)^3 = \frac{(n+1)^2(n+4n+4)}{4} = \frac{(n+1)^2(n+2)^2}{4} \\ &= \left(\frac{(n+2)(n+2)}{2} = (1 + 2 + 3 + \cdots n + (n+1))^2\right)^2.\end{aligned}$$

(d) $2n^2 \geq (n+1)^2$; od jakého $n \in \mathbb{N}$ tvrzení platí?

Řešení:

- Krok 1: postupným zkoušením zjistíme, že tvrzení zřejmě bude platit až pro $n \geq 3$. Pro $n = 3$:
$$2 \cdot 3^2 \geq (3+1)^2.$$
- Krok 2: předpokládejme, že pro pevné $n \in \mathbb{N}$ platí
$$2n^2 \geq (n+1)^2$$

  .
- Krok 3: chceme tvrzení ukázat pro $n + 1$. Tedy chceme
$$2(n+1)^2 \geq (n+2)^2 = n^2 + 4n + 4$$

  . Pak
$$\begin{aligned}2(n+1)^2 = 2n^2 + 4n + 2 &\overset{\text{ind. př}}{\geq} (n+1)^2 + 4n + 2 = n^2 + 6n + 3 \\ &= n^2 + 4n + 4 + (2n - 1) \geq (n = 2)^2\end{aligned}$$

  V posledním kroku jsme využili faktu, že $n \geq 3$.

(e) $2^n \geq n^2$; od jakého $n \in \mathbb{N}$ tvrzení platí?

Řešení:

- Krok 1: pro $n = 4$:
$$2^4 \geq 4^2$$
- Krok 2: předpokládejme, že pro pevné $n \in \mathbb{N}$ platí
$$2^n \geq n^2.$$
- Krok 3: chceme tvrzení ukázat pro $n+1$. Tedy chceme ukázat
$$2^{n+1} \geq (n+1)^2.$$
Tedy
$$2^{n+1} = 2 \cdot 2^n \overset{\text{ind. př}}{\geq} 2n^2 \geq (n+1)^2$$
Poslední krok plyne z předchozího příkladu.

(f) $3 \mid (n^3 + 2n)$ (číslo 3 dělí výraz $n^3 + 2n$). Umíte dokázat i bez indukce?
Řešení:

- Krok 1: pro $n = 1$:
$$3|(1^3 + 2 \cdot 1)$$
- Krok 2: předpokládejme, že pro pevné $n \in \mathbb{N}$ platí
$$3|(n^3 + 2n)$$
- Krok 3: chceme tvrzení ukázat pro $n+1$. Tedy chceme ukázat
$$3|((n+1)^3 + 2(n+1))$$
Máme
$$((n+1)^3 + 2(n+1)) = n^3 + 3n^2 + 3n + 1 + 2n + 2 = (n^3 + 2n) + 3(n^2 + n + 1)$$
Z indukčního předpokladu víme, že $3|(n^3 + 2n)$, navíc zjevně $3|3(n^2 + n + 1)$.

(g) Matematickou indukcí dokažte, že v konvexním n-úhelníku existuje právě $n(n-3)/2$ úhlopříček.
Řešení:

- Krok 1: pro $n = 3$ - trojúhelník má $3(3-3)/2 = 0$ úhlopříček - pravda.
zkusme ještě $n = 4$ - čtyřúhelník má $4(4-3)/2 = 2$ úhlopříčky - platí.
- Krok 2: předpokládejme, že pro pevné $n \in \mathbb{N}$ platí, že konvexní n-úhelník má $n(n-3)/2$ úhlopříček.
- Krok 3: chceme tvrzení ukázat pro $n+1$. Chceme ukázat, že konvexní $n+1$-úhelník má $(n+1)(n+1-3)/2$ úhlopříček.
Úvaha: přidáme-li k n-úhelníku 1 bod, tak přibude $n-2$ nových úhlopříček (přibudou spojnice ke všem bodům krom přímých sousedů) a navíc 1 původní strana se stane úhlopříčkou. Tedy počet úhlopříček bude:
$$\frac{n(n-3)}{2} + n - 2 + 1 = \frac{n^2 - 3n + 2n - 2}{2} = \frac{n^2 - n - 2}{2} = \frac{(n+1)(n-2)}{2}.$$