



1. cvičení – Rovnice a nerovnice

<https://www2.karlin.mff.cuni.cz/~kuncova/vyuka.php>, kuncova@karlin.mff.cuni.cz

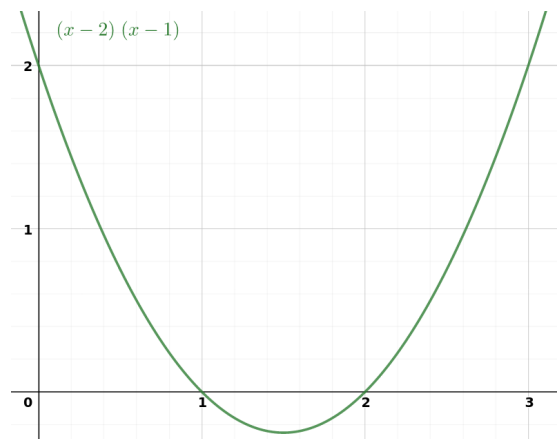
Příklady

1. Nalezněte všechna $x \in \mathbb{R}$, pro která platí:

(a) $(x - 2)(x + 3) \geq 4x - 8$

Řešení:

$$\begin{aligned}(x - 2)(x + 3) &\geq 4x - 8 \\ x^2 + 3x - 2x - 6 &\geq 4x - 8 \\ x^2 - 3x + 2 &\geq 0 \\ (x - 2)(x - 1) &\geq 0\end{aligned}$$



Tedy $x \in (-\infty, 1] \cup [2, \infty)$.

(b) $\frac{2x^2 + 1}{x^2 + 2x + 2} < 1$

Řešení:

$$\begin{aligned}\frac{2x^2 + 1}{x^2 + 2x + 2} &< 1 \\ \frac{2x^2 + 1 - (x^2 + 2x + 2)}{x^2 + 2x + 2} &< 0 \\ \frac{x^2 - 2x - 1}{x^2 + 2x + 2} &< 0\end{aligned}$$

Pro $\forall x \in \mathbb{R}$ máme $x^2 + 2x + 2 > 0$. Vyšetřujeme tedy $x^2 - 2x - 1 < 0$. Kořeny:

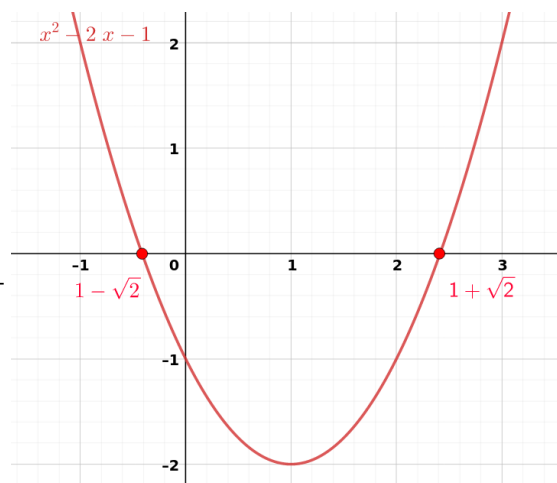
$$\begin{aligned}x_{1,2} &= \frac{2 \pm \sqrt{4 + 4}}{2} \\ x_{1,2} &= 1 \pm \sqrt{2}\end{aligned}$$

Dohromady $x \in (1 - \sqrt{2}, 1 + \sqrt{2})$.

(c) $\frac{x - 8}{x - 9} \geq x$

Řešení: Podmínky: $x \neq 9$.

$$\begin{aligned}\frac{x - 8 - x(x - 9)}{x - 9} &\geq 0 \\ \frac{x^2 + 10x - 8}{x - 9} &\geq 0\end{aligned}$$



Kořeny:

$$x_{1,2} = \frac{-10 \pm \sqrt{100 - 32}}{-2}$$

$$x_{1,2} = 5 \pm \sqrt{17}$$

Uděláme tabulku

	$(-\infty, 5 - \sqrt{17})$	$(5 - \sqrt{17}, 9)$	$(9, 5 + \sqrt{17})$	$(5 + \sqrt{17}, \infty)$
$x - 9$	—	—	+	+
$-x^2 + 10x - 8$	—	+	+	—
	+	—	+	—

Vyjde $x \in (-\infty, 5 - \sqrt{17}] \cup (9, 5 + \sqrt{17}]$.

(d) $\frac{x+5}{x+3} > \frac{x+4}{x+1}$

Řešení: Podmínky: $x \neq -3, -1$.

$$\begin{aligned} \frac{x+5}{x+3} &> \frac{x+4}{x+1} \\ \frac{x+5}{x+3} - \frac{x+4}{x+1} &> 0 \\ \frac{(x+5)(x+1) - (x+4)(x+3)}{(x+3)(x+1)} &> 0 \\ \frac{x^2 + 6x + 5 - x^2 - 7x - 12}{(x+3)(x+1)} &> 0 \\ \frac{-x - 7}{(x+3)(x+1)} &> 0 \end{aligned}$$

Uděláme tabulku Vyjde $x \in (-\infty, -7) \cup (-3, -1)$.

	$(-\infty, -7)$	$(-7, -3)$	$(-3, -1)$	$(-1, \infty)$
$-x - 7$	+	—	—	—
$x + 3$	—	—	+	+
$x + 1$	—	—	—	+
	+	—	+	—

(e) $\frac{x+6}{x-3} > \frac{x+4}{x+1}$

Řešení: Podmínky: $x \neq 3, -1$.

$$\begin{aligned}\frac{x+6}{x-3} &> \frac{x+4}{x+1} \\ \frac{x+6}{x-3} - \frac{x+4}{x+1} &> 0 \\ \frac{(x+6)(x+1) - (x+4)(x-3)}{(x-3)(x+1)} &> 0 \\ \frac{6x+18}{(x-3)(x+1)} &> 0\end{aligned}$$

Uděláme tabulku

	$(-\infty, -3)$	$(-3, -1)$	$(-1, 3)$	$(3, \infty)$
$6x+18$	—	+	+	+
$x-3$	—	—	—	+
$x+1$	—	—	+	+
	—	+	—	+

Vyjde $x \in (-3, -1) \cup (3, \infty)$.

2. Nalezněte všechna $x \in \mathbb{R}$, pro která platí:

(a) $|x-1| + |x-3| + |x-5| = 4$

Řešení: Kořeny pro absolutní hodnoty jsou 1, 3, 5, příklad tedy budeme řešit po následujících intervalech:

i. $x \in (-\infty, 1)$

$$\begin{aligned}-x+1-x+3-x+5 &= 4 \\ -3x &= -5 \\ x &= \frac{5}{3}\end{aligned}$$

ale $\frac{5}{3} \notin (-\infty, 1)$.

ii. $x \in [1, 3)$

$$\begin{aligned}x-1-x+3-x+5 &= 4 \\ x &= 3\end{aligned}$$

ale $3 \notin [1, 3)$

iii. $x \in [3, 5)$

$$\begin{aligned}x-1+x-3-x+5 &= 4 \\ x &= 3\end{aligned}$$

iv. $x \in [5, \infty)$

$$\begin{aligned}x-1+x-3+x-5 &= 4 \\ x &= \frac{13}{3}\end{aligned}$$

ale $\frac{13}{3} \notin [5, \infty)$

Závěr: $x = 3$.

(b) $||x-1| - 2| < 1$

Rozdělíme na dva intervaly

i. $x \in (-\infty, 1)$

$$|-x+1-2| < 1$$

$$|-x-1| < 1$$

$$|-1| \cdot |x+1| < 1$$

$$|x+1| < 1$$

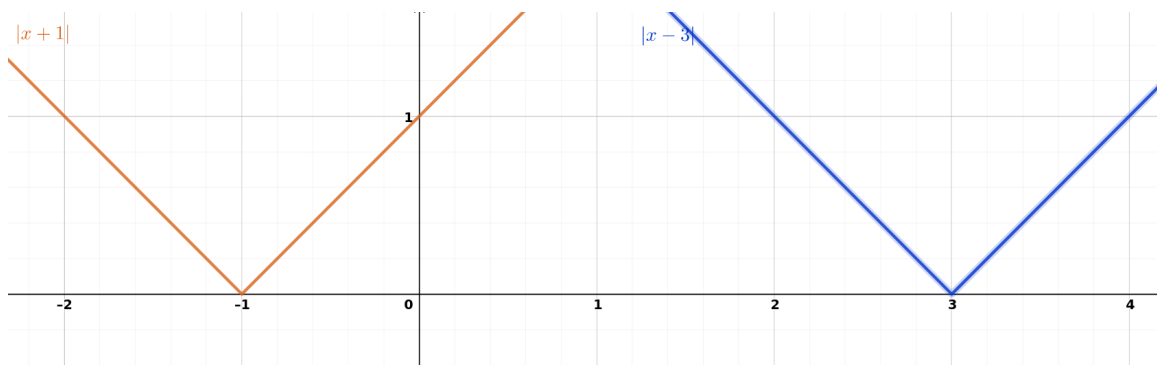
ii. $x \in [1, \infty)$

$$|x-1-2| < 1$$

$$|x-3| < 1$$

Tedy $x \in (2, 4) \cap [1, \infty)$.

(Možno číst i jako „všechna x , která mají vzdálenost od bodu 1 rovnu 1“.) Tedy $x \in (-2, 0) \cap (-\infty, 1)$.



Dohromady: $x \in (-2, 0) \cup (2, 4)$.

(c) $|x-1| - |x-3| > x$ Rozdělíme na intervaly

i. $x \in (-\infty, 1)$

$$-x+1+x-3 > x$$

$$-2 > x$$

Tedy $x \in (-\infty, -2)$.

ii. $x \in [1, 3)$

$$x-1+x-3 > x$$

$$x > 4$$

Nelze.

iii. $x \in [3, \infty)$

$$x-1-x+3 > x$$

$$2 > x$$

Nelze.

Závěr: $x \in (-\infty, -2)$.

(d) $|2x+3| + |2x+5| > |x-1|$ Rozdělíme na intervaly

i. $x \in (-\infty, -5/2)$

$$-2x-3-2x-5 > -x+1$$

$$-3 > x$$

Tedy $x \in (-\infty, -3)$.

ii. $x \in [-5/2, -3/2)$

$$-2x-3+2x+5 > -x+1$$

$$x > -1$$

Nelze.

$$\text{iii. } x \in [-3/2, 1)$$

$$\text{iv. } x \in [1, \infty)$$

$$\begin{aligned} 2x + 3 + 2x + 5 &> -x + 1 \\ x &> -7/5 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} +2x + 3 + 2x + 5 &> x - 1 \\ x &> -3 \end{aligned}$$

$$\text{Tedy } x \in (-7/5, 1).$$

$$\text{Tedy } x \in [1, \infty).$$

$$\text{Závěr: } x \in (-\infty, -3) \cup (-7/5, \infty).$$

(e) $|x + 2| > |x| - x$ Rozdělíme na intervaly

$$\text{i. } x \in (-\infty, -2)$$

$$\text{ii. } x \in [-2, 0)$$

$$\text{iii. } x \in [0, \infty)$$

$$\begin{aligned} -x - 2 &> -x - x \\ x &> 2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x + 2 &> -x - x \\ x &> -\frac{2}{3} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x + 2 &> x - x \\ x &> -2 \end{aligned}$$

Nelze.

$$\text{Tedy } x \in (-\frac{2}{3}, 0).$$

$$\text{Tedy } x \in [0, \infty).$$

$$\text{Závěr: } x \in (-\frac{2}{3}, \infty).$$

(f) $|x + 2| > |x + 1| + x$ Rozdělíme na intervaly

$$\text{i. } x \in (-\infty, -2)$$

$$\text{ii. } x \in [-2, -1)$$

$$\text{iii. } x \in [-1, \infty)$$

$$\begin{aligned} -x - 2 &> -x - 1 + x \\ -1 &> x \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x + 2 &> -x - 1 + x \\ x &> -3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x + 2 &> x + 1 + x \\ 1 &> x \end{aligned}$$

$$\text{Tedy } x \in (-\infty, -2).$$

$$\text{Tedy } x \in [-2, -1).$$

$$\text{Tedy } x \in [-1, 1).$$

$$\text{Závěr: } x \in (-\infty, 1).$$

(g) $|x - |x + 2|| < x$ Nejprve rozdělíme na dva intervaly

$$\text{i. } x \in (-\infty, -2)$$

$$\text{ii. } x \in [-2, \infty)$$

$$\begin{aligned} |x + x + 2| &< x \\ |2(x + 1)| &< x \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} |x - x - 2| &< x \\ 2 &< x \end{aligned}$$

Protože $x < -2$, lze odstranit abs.
hodnotu přidáním minus:

$$\text{Tedy } x \in (2, \infty).$$

$$\begin{aligned} |2(x + 1)| &< x \\ -2(x + 1) &< x \\ -\frac{2}{3} &< x \end{aligned}$$

Nelze.

$$\text{Závěr: } x \in (2, \infty).$$

(h) $|x + |x + 2|| < 4x$ Rozdělíme na intervaly

i. $x \in (-\infty, -2)$

ii. $x \in [-2, \infty)$

$$|x + x + 2| < 4x$$

$$|2(x + 1)| < 4x$$

$$|x - x - 2| < 4x$$

$$|-2| < 4x$$

$$\frac{1}{2} < x$$

Opět rozdělíme na dva intervaly

A. $x \in [-2, -1)$ B. $x \in [-1, \infty)$

$$-2x - 2 < 4x$$

$$2x + 2 < 4x$$

$$-\frac{1}{3} < x$$

$$1 < x$$

Tedy $x \in (1, \infty)$.

Nelze.

Nelze.

Závěr: $x \in (1, \infty)$.

3. V závislosti na parametru $a \in \mathbb{R}$ najděte všechna $x \in \mathbb{R}$, pro která platí:

(a) $|x| + |x + 7| < a$

Řešení: Uvažujme funkci $f(x) = |x| + |x + 7|$. Pomocí intervalů nakresleme její graf:

i. $x \in (-\infty, -7)$

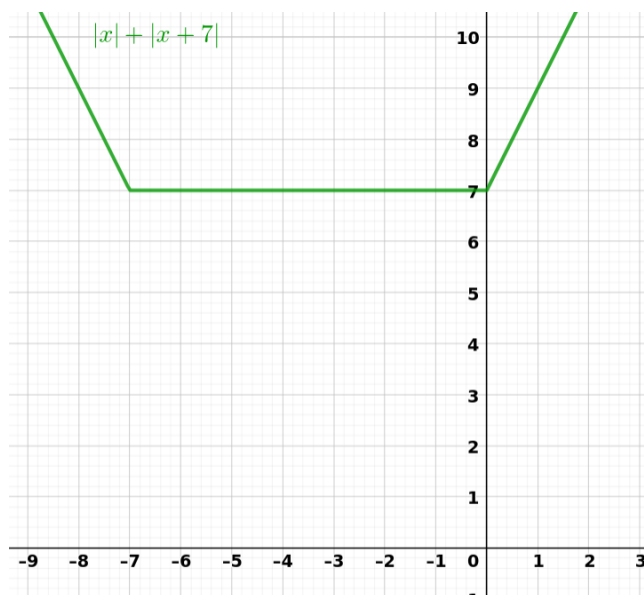
ii. $x \in (-7, 0)$

iii. $x \in (0, \infty)$

$$f(x) = -x - x - 7 = -2x - 7$$

$$f(x) = -x + x + 7 = 7$$

$$f(x) = x + x + 7 = 2x + 7$$



Pak lze z grafu najít řešení nerovnice $f(x) < a$:

i. pro $a \in (-\infty, 7]$, nerovnice nemá řešení;

ii. $a \in (7, \infty)$ máme $x \in \left(-\frac{a+7}{2}, \frac{a-7}{2}\right)$.

(b) $|x(x+2)| > a$

Řešení: Načtněme graf funkce $f(x) = |x(x+2)|$.

Řešení pak hledáme na intervalech:

i. $x \in (-2, 0)$:

$$-x^2 - 2x - a > 0$$

$$x^2 + 2x + a < 0$$

Kořeny

$$x_{1,2} = \frac{-2 \pm \sqrt{4 - 4a}}{2}$$

(Odmocnina definovaná pro $a < 1$.)

ii. $x \in (-\infty, -2) \cup (0, \infty)$:

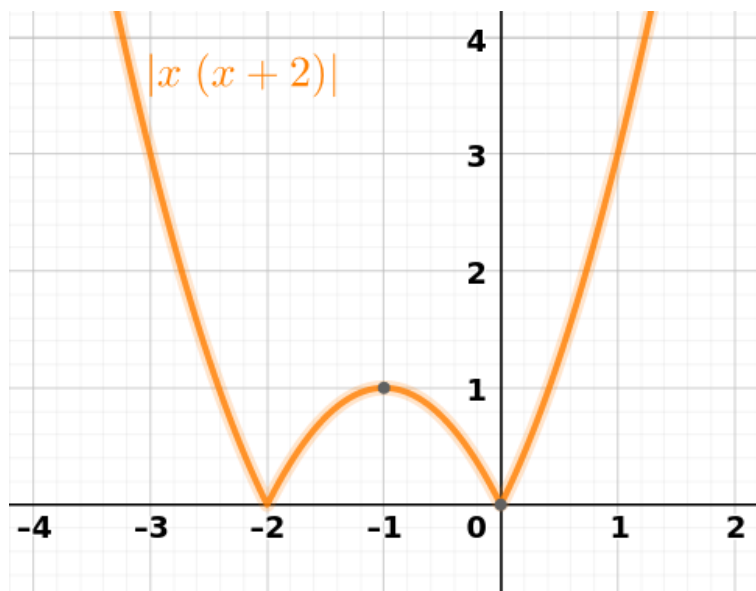
$$x^2 + 2x - a > 0$$

Kořeny

$$x_{1,2} = \frac{-2 \pm \sqrt{4 + 4a}}{2}$$

(Odmocnina definovaná pro $a > -1$.)

iii. Nezapomeneme uvažovat krajní body.



Závěr z výpočtů a obrázku:

i. $a \in (-\infty, 0)$: $x \in \mathbb{R}$

ii. $a = 0$, $x \in \mathbb{R} \setminus \{-2, 0\}$

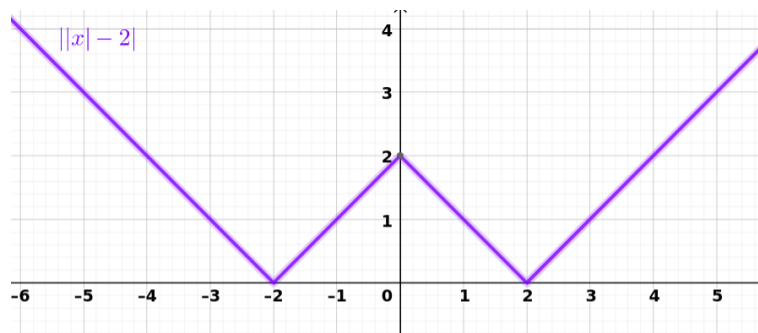
iii. $a \in (0, 1)$: $x \in (-\infty, -1 - \sqrt{1+a}) \cup (-1 - \sqrt{1-a}, -1 + \sqrt{1-a}) \cup (-1 + \sqrt{1+a}, \infty)$

iv. $a = 1$: $x \in (-\infty, -1 - \frac{\sqrt{8}}{2}) \cup (-1 + \frac{\sqrt{8}}{2}, \infty)$

v. $a \in (1, \infty)$: $x \in (-\infty, -1 - \sqrt{1+a}) \cup (-1 + \sqrt{1+a}, \infty)$

(c) $||x| - 2| < a$

Řešení: Zakreslíme graf a odečteme výsledek:



i. $a \in (-\infty, 0]$: $\emptyset$

ii. $a \in (0, 2]$: $x \in (-2 - a, -2 + a) \cup (2 - a, 2 + a)$

iii. $a \in (2, \infty)$: $x \in (-2 - a, 2 + a)$

(d) $|x^2 + 2x| < a + 2x$

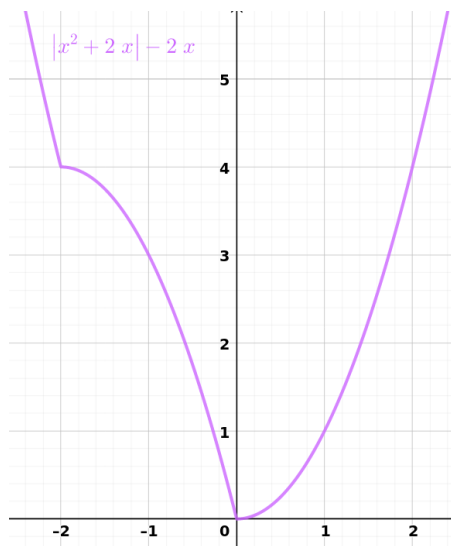
Řešení: Rozdělíme na intervaly a načrtneme funkci $f(x) = |x^2 + 2x| - 2x$.

i. $x \in (-\infty, -2) \cup (0, \infty)$, pak $f(x) = x^2$

Pro nerovnici $x^2 < a$ máme kořeny $x_{1,2} = \pm\sqrt{a}$. (Odmocnina je definovaná jen pro $a \geq 0$.)

ii. $x \in (2, 0)$, pak $f(x) = -x^2 - 4x$.

Pro nerovnici $-x^2 - 4x < a$ máme kořeny $x_{1,2} = \frac{-4 \pm \sqrt{16 - 4a}}{2}$ (Odmocnina je definovaná jen pro $a \leq 4$.)



Z grafu a výpočtů získáme výsledek

i. $a \leq 0$, $\emptyset$

ii. $a \in (0, 4)$: $x \in (-2 + \sqrt{4 - a}, \sqrt{a})$

iii. $a \in [4, \infty)$: $x \in (-\sqrt{a}, \sqrt{a})$.

4. Najděte chybu:

$$\begin{aligned}\frac{x+4}{x-3} &\leq 0 & / \cdot (x-3) \\ x+4 &\leq 0 \\ x &\leq 4.\end{aligned}$$

Řešení: Pro $x-3 < 0$ se při násobení otáčí znaménko nerovnice. Správné řešení pak je $-4 \leq x < 3$.

5. Najděte kvadratickou nerovnici (zhruba tvaru $ax^2 + bx + c > 0$, $ax^2 + bx + c \leq 0, \dots$), která bude mít řešení tvaru:

Řešení:

- (a) $x \in (-\infty, -3] \cup [2, \infty)$
 $(x+3)(x-2) \geq 0$, tedy $x^2 + x - 6 \geq 0$.
- (b) $x \in (-1, 5)$
 $(x+1)(x-5) < 0$, tedy $x^2 - 4x - 5 < 0$.
- (c) $x = -6$
 $(x+6)^2 \leq 0$, tedy $x^2 + 12x + 36 \leq 0$.
- (d) $\emptyset$
např. $x^2 + 42 < 0$.

6. Uvažujme funkci

$$f(x) = \frac{x^2 + 2x + c}{x^2 + 4x + 3c},$$

kde $c \in \mathbb{R}$ je parametr. Co musí splňovat c , aby obor hodnot funkce f mohl být roven celému $\mathbb{R}$? (Hledáme tedy nutnou podmínku pro c .)

Řešení: Cíl: pro každé $y \in \mathbb{R}$ najít $x \in \mathbb{R}$ tak, že

$$\frac{x^2 + 2x + c}{x^2 + 4x + 3c} = y$$

(a) Podmínky: $x^2 + 4x + 3c \neq 0$. Dostaneme

$$x_{1,2} \neq \frac{-4 \pm \sqrt{16 - 12c}}{2}$$

Pro $c > \frac{4}{3}$ nikdy nenastane, jinak $x_{1,2} \neq -2 \pm \sqrt{4 - 3c}$.

(b) Při splnění podmínek dostaneme

$$\begin{aligned}x^2 + 2x + c &= y(x^2 + 4x + 3c) \\ (1-y)x^2 + (2-4y)x + c(1-3y) &= 0\end{aligned}$$

i. Předpokládejme, že $y \neq 1$. Aby rovnice měla řešení (hledáme x pro zadané y), potřebujeme $D \geq 0$. Tedy

$$\begin{aligned}(2-4y)^2 - 4c(1-y)(1-3y) &\geq 0 \\ (16-12c)y^2 + (16c-16)y + 4(1-c) &\geq 0 \\ (4-3c)y^2 + (4c-4)y + (1-c) &\geq 0\end{aligned}$$

Tato nerovnice musí platit pro všechna $y \in \mathbb{R}$. To nastane v případě, že její vedoucí koeficient je kladný ($c < \frac{4}{3}$) a navíc její diskriminant $\bar{D} \leq 0$. Neboli

$$(4c - 4)^2 - 4(4 - 3c)(1 - c) \leq 0$$

$$c^2 - c \leq 0$$

$$c(1 - c) \leq 0$$

Odtud podmínka $0 \leq c \leq 1$.

- ii. Pro $y = 1$ dostaneme rovnici $-2x - 2c = 0$, tedy $x = -c$.
Porovnáme s podmínkami a získáme

$$-c \neq -2 \pm \sqrt{4 - 3c},$$

neboli $c \neq 0, 1$.

Závěr: $c \in (0, 1)$.