# 1. cvičení – Rovnice a nerovnice

https://www2.karlin.mff.cuni.cz/~kuncova/vyuka.php, kuncova@karlin.mff.cuni.cz

## Algoritmy

### Nerovnice se zlomky

1. Napíšeme **podmínky**.
2. Přesuneme všechny výrazy na levou stranu tak, aby vpravo zůstala jen nula.
3. Vyjádříme výrazy jako součiny a podíly.
4. Najdeme kořeny a zapíšeme intervaly - dáváme pozor na krajní body.
5. Napíšeme tabulku se znaménky.
6. Ještě jednou zkontrolujeme podmínky a zapíšeme řešení.

### Nerovnice s absolutní hodnotou

1. Napíšeme **podmínky**.
2. Nalezneme kořeny pro výrazy v absolutních hodnotách, čímž získáme sadu intervalů.
3. Jeden interval zafixujeme a odstraníme absolutní hodnoty. Nerovnici vyřešíme. Výsledek pronikneme se zafixovaným intervalem.
4. Postupujeme tak pro všechny intervaly. Nezapomeneme krajní body.
5. Ještě jednou zkontrolujeme podmínky a zapíšeme řešení - vše, co nám vyšlo.

### Varování

Pokud chceme **násobit/dělit** výrazem s **proměnnou**, je třeba opatrnosti, abychom např. nedělili 0 nebo abychom nezměnili znaménko nerovnice. V takovém případě buď vytýkáme nebo rozsypeme příklad na případy.

## Hinty

Řešení kvadratické rovnice $ax^2 + bx + c = 0$, $a, b, c \in \mathbb{R}$, lze nalézt pomocí vzorce

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

Pokud vyjdou $\mathbb{R}$ kořeny, tak lze rovnici zapsat jako $a(x - x_1)(x - x_2) = 0$.

## Příklady

1. Nalezněte všechna $x \in \mathbb{R}$, pro která platí:

   (a) $(x-2)(x+3) \geq 4x - 8$

   (b) $\dfrac{2x^2+1}{x^2+2x+2} < 1$

   (c) $\dfrac{x-8}{x-9} \geq x$

   (d) $\dfrac{x+5}{x+3} > \dfrac{x+4}{x+1}$

   (e) $\dfrac{x+6}{x-3} > \dfrac{x+4}{x+1}$

2. Nalezněte všechna $x \in \mathbb{R}$, pro která platí:

(a) $|x-1| + |x-3| + |x-5| = 4$

(b) $||x-1| - 2| < 1$

(c) $|x-1| - |x-3| > x$

(d) $|2x+3| + |2x+5| > |x-1|$

(e) $|x+2| > |x| - x$

(f) $|x+2| > |x+1| + x$

(g) $|x - |x+2|| < x$

(h) $|x + |x+2|| < 4x$

3. V závislosti na parametru $a \in \mathbb{R}$ nalezněte všechna $x \in \mathbb{R}$, pro která platí:
*(Hint: nakreslete graf.)*

(a) $|x| + |x+7| < a$

(b) $|x(x+2)| > a$

(c) $||x| - 2| < a$

(d) $|x^2 + 2x| < a + 2x$

4. Najděte chybu:

$$\begin{aligned} \frac{x+4}{x-3} &\leq 0 \qquad / \cdot (x-3) \\ x+4 &\leq 0 \\ x &\leq -4. \end{aligned}$$

5. Najděte kvadratickou nerovnici (zhruba tvaru $ax^2 + bx + c > 0$, $ax^2 + bx + c \leq 0, \dots$), která bude mít řešení tvaru:

(a) $x \in (-\infty, -3] \cup [2, \infty)$

(b) $x \in (-1, 5)$

(c) $x = -6$

(d) $\emptyset$

6. ❀ Uvažujme funkci

$$f(x) = \frac{x^2 + 2x + c}{x^2 + 4x + 3c},$$

kde $c \in \mathbb{R}$ je parametr. Co musí splňovat $c$, aby obor hodnot funkce $f$ mohl být roven celému $\mathbb{R}$? (Hledáme tedy nutnou podmínku pro $c$.)

(6) Kdy má (pro $x$) řešení rovnice $x^2 + 2x + c = y(x^2 + 4x + 3c)$? Nesouvisí to s diskriminantem?