13. cvičení – Integrál závislý na parametru

https://www2.karlin.mff.cuni.cz/~kuncova/vyuka.php, kuncova@karlin.mff.cuni.cz

Spojitost

1. Ukažte, že funkce $F(\alpha) = \displaystyle\int_0^\infty \frac{e^{-\alpha x}}{1+x^2}\,dx$, je spojitá v intervalu $[0,\infty)$. Spočtěte $\lim\limits_{\alpha\to\infty} F(\alpha)$.

   Řešení: Uvažujeme $\alpha \in T = [0,\infty)$, $x \in X = (0,\infty)$, $f(x,\alpha) = \frac{e^{-\alpha x}}{1+x^2}$.

   - Funkce je dobře definována, protože pro $\alpha \in [0,\infty)$ je $\frac{e^{-\alpha x}}{1+x^2} \leq \frac{1}{1+x^2}$ a tedy $\int_0^\infty \frac{e^{-\alpha x}}{1+x^2}$ konverguje ze SK.
   - zafixujeme $\alpha \in T$. Pak funkce $f(x,\alpha)$ je spojitá (jako funkce x) na celém X a tedy je měřitelná.
   - zafixujeme $x \in X$. Pak funkce $f(x,\alpha)$ je spojitá (jako funkce α) na celém T.
   - položme $g(x) = \frac{1}{1+x^2}$. Pak $g \in L^1(X)$ a platí

   $$\left|\frac{e^{-\alpha x}}{1+x^2}\right| \leq \frac{1}{1+x^2}.$$

   Závěr: funkce $F(\alpha)$ je spojitá na celém T.

2. Ukažte, že funkce $F(\alpha) = \displaystyle\int_0^\infty e^{-\alpha x}\,dx$, je spojitá v intervalu $(0,\infty)$. Spočtěte $\lim\limits_{\alpha\to\infty} F(\alpha)$.

   Řešení: Uvažujeme $\alpha \in T = (0,\infty)$, $x \in X = (0,\infty)$, $f(x,\alpha) = e^{-\alpha x}$.

   - Funkce je dobře definována, protože pro $\alpha \in (0,\infty)$ je

   $$\int_0^\infty e^{-\alpha x}\,dx = \left[\frac{e^{-\alpha x}}{-\alpha}\right]_0^\infty = \frac{1}{\alpha}$$

   - zafixujeme $\alpha \in T$. Pak funkce $f(x,\alpha)$ je spojitá (jako funkce x) na celém X a tedy je měřitelná.
   - zafixujeme $x \in X$. Pak funkce $f(x,\alpha)$ je spojitá (jako funkce α) na celém T.
   - uvažujme $\widetilde{T} = [\delta,\infty)$, $\delta > 0$. Položme $g(x) = e^{-\delta x}$. Pak $g \in L^1(X)$ a platí

   $$|e^{-\alpha x}| \leq e^{-\delta x}$$

     pro $\alpha \in \widetilde{T}$.

   Závěr: funkce $F(\alpha)$ je spojitá na celém $[\delta,\infty)$ pro všechna $\delta > 0$. Tedy je spojitá i na celém $(0,\infty)$.

3. Ukažte, že funkce $F(\alpha) = \displaystyle\int_0^\infty \frac{x^{\alpha-1}}{1+x}\,dx$, je spojitá v intervalu $(0,1)$.

   Řešení: Uvažujeme $\alpha \in T = (0,1)$, $x \in X = (0,\infty)$, $f(x,\alpha) = \frac{x^{\alpha-1}}{1+x}$.

   - Funkce je dobře definována, u 0 srovnáme LSK s $x^{\alpha-1}$, u ∞ s $x^{\alpha-2}$.

- zafixujeme $\alpha \in T$. Pak funkce $f(x,\alpha)$ je spojitá (jako funkce x) na celém X a tedy je měřitelná.
- zafixujeme $x \in X$. Pak funkce $f(x,\alpha)$ je spojitá (jako funkce α) na celém T.
- uvažujme $\widetilde{T} = [p,q]$, $0 < p < q < 1$. Položme

  $$g(x) = \begin{cases} \frac{x^{p-1}}{1+x}, & x \in (0,1) \\ \frac{x^{q-1}}{1+x}, & x \in [1,\infty) \end{cases}$$

  Pak $g \in L^1(X)$ a platí

  $$\left| \frac{x^{\alpha-1}}{1+x} \right| \leq g(x)$$

  pro $\alpha \in \widetilde{T}$.

Závěr: funkce $F(\alpha)$ je spojitá na celém $[p,q]$ pro všechna p,q. Tedy je spojitá i na celém $(0,1)$.

4. Ukažte, že funkce $F(\alpha) = \displaystyle\int_0^\infty \frac{\ln(1+\alpha^2x^2)}{x^2}\,\mathrm{d}x$, je spojitá v intervalu $(-\infty,\infty)$.

   Řešení: Uvažujeme $\alpha \in T = (-\infty,\infty)$, $x \in X = (0,\infty)$, $f(x,\alpha) = \frac{\ln(1+\alpha^2x^2)}{x^2}$.

   - Funkce je dobře definována, protože v 0 lze funkci spojitě dodefinovat a v ∞ lze srovnat s $\frac{\ln x}{x^2}$.
   - zafixujeme $\alpha \in T$. Pak funkce $f(x,\alpha)$ je spojitá (jako funkce x) na celém X a tedy je měřitelná.
   - zafixujeme $x \in X$. Pak funkce $f(x,\alpha)$ je spojitá (jako funkce α) na celém T.
   - uvažujme $\widetilde{T} = [-p,p]$, $0 < p$. Položme

     $$g(x) = \frac{\ln(1+p^2x^2)}{x^2}$$

     Pak $g \in L^1(X)$ a platí

     $$\left| \frac{\ln(1+\alpha^2x^2)}{x^2} \right| \leq g(x)$$

     pro $\alpha \in \widetilde{T}$.

   Závěr: funkce $F(\alpha)$ je spojitá na celém $[-p,p]$ pro všechna $p > 0$. Tedy je spojitá i na celém $\mathbb{R}$.

5. Ukažte, že funkce $F(\alpha) = \displaystyle\int_0^1 \operatorname{sgn}(x-\alpha)\,\mathrm{d}x$, je spojitá v intervalu $(-\infty,\infty)$.

   Řešení: Uvažujeme $\alpha \in T = (-\infty,\infty)$, $x \in X = (0,1)$, $f(x,\alpha) = \operatorname{sgn}(x-\alpha)$.

   Nelze použít větu, tedy bude potřeba integrál přímo upočítat. Lze ukázat, že

   $$F(a) = \begin{cases} 1, & a \leq 0, \\ 1-2a, & 0 < a < 1, \\ -1, & a \geq 1. \end{cases}$$

Jde tedy o spojitou funkci.

Závěr: funkce $F(\alpha)$ je spojitá na celém T.

6. Ukažte, že funkce $F(\alpha) = \displaystyle\int_0^\infty x^{\alpha-1}e^{-x}\,\mathrm{d}x$, (tzv. Gamma funkce) je spojitá v intervalu $(0,\infty)$.

Řešení: Uvažujeme $\alpha \in T = (0,\infty)$, $x \in X = (0,\infty)$, $f(x,\alpha) = x^{\alpha-1}e^{-x}$.

- Funkce je dobře definována, protože pro $\alpha \in (0,\infty)$ srovnáme u 0 s $x^{\alpha-1}$ a u ∞ s $x^{\alpha-1}e^{-x}$.
- zafixujeme $\alpha \in T$. Pak funkce $f(x,\alpha)$ je spojitá (jako funkce x) na celém X a tedy je měřitelná.
- zafixujeme $x \in X$. Pak funkce $f(x,\alpha)$ je spojitá (jako funkce α) na celém T.
- uvažujme $\widetilde{T} = [p,q]$, $0 < p < q < \infty$. Položme

$$g(x) = \begin{cases} e^{-x}x^{p-1}, & x \in (0,1), \\ e^{-x}x^{q-1}, & x \in [1,\infty). \end{cases}$$

  Pak $g \in L^1(X)$ a platí

$$\left|x^{\alpha-1}e^{-x}\right| \le g(x)$$

  pro $\alpha \in \widetilde{T}$.

Závěr: funkce $F(\alpha)$ je spojitá na celém $[p,q]$ pro všechna p,q. Tedy je spojitá i na celém $(0,\infty)$.

7. Ukažte, že funkce $F(\alpha) = \displaystyle\int_0^\infty \frac{x}{2+x^\alpha}\,\mathrm{d}x$, je spojitá v intervalu $(2,\infty)$.

Řešení: Uvažujeme $\alpha \in T = (2,\infty)$, $x \in X = (0,\infty)$, $f(x,\alpha) = \frac{x}{2+x^\alpha}$

- Funkce je dobře definována, protože pro $\alpha \in (2,\infty)$ je v 0 spojitá a v ∞ srovnáme s $x^{1-\alpha}$.
- zafixujeme $\alpha \in T$. Pak funkce $f(x,\alpha)$ je spojitá (jako funkce x) na celém X a tedy je měřitelná.
- zafixujeme $x \in X$. Pak funkce $f(x,\alpha)$ je spojitá (jako funkce α) na celém T.
- uvažujme $\widetilde{T} = [p,\infty)$, $2 < p$. Položme

$$g(x) = \begin{cases} \frac{x}{2}, & x \in (0,1), \\ \frac{x}{2+x^p}, & x \in [1,\infty). \end{cases}$$

  Pak $g \in L^1(X)$ a platí

$$\left|\frac{x}{2+x^\alpha}\right| \le g(x)$$

  pro $\alpha \in \widetilde{T}$.

Závěr: funkce $F(\alpha)$ je spojitá na celém $[p,\infty)$ pro všechna $p>2$. Tedy je spojitá i na celém $(2,\infty)$.

8. Ukažte, že funkce $F(\alpha)=\displaystyle\int_{\frac{1}{2}}^{\infty}\frac{\cos x}{x^{\alpha}}\,\mathrm{d}x$, je spojitá v intervalu $(1,\infty)$.

Řešení: Uvažujeme $\alpha\in T=(1,\infty)$, $x\in X=(\frac{1}{2},\infty)$, $f(x,\alpha)=\frac{\cos x}{x^{\alpha}}$.

- Funkce je dobře definována, protože pro $\alpha\in(1,\infty)$ srovnáme u ∞ s $1/x^{\alpha}$.
- zafixujeme $\alpha\in T$. Pak funkce $f(x,\alpha)$ je spojitá (jako funkce x) na celém X a tedy je měřitelná.
- zafixujeme $x\in X$. Pak funkce $f(x,\alpha)$ je spojitá (jako funkce α) na celém T.
- uvažujme $\widetilde{T}=[p,q]$, $1<p<q<\infty$. Položme

$$g(x)=\begin{cases}\frac{|\cos x|}{x^{q}}, & x\in(\frac{1}{2},1),\\ \frac{|\cos x|}{x^{p}}, & x\in[1,\infty).\end{cases}$$

  Pak $g\in L^{1}(X)$ a platí

$$\frac{|\cos x|}{x^{\alpha}}\le g(x)$$

  pro $\alpha\in\widetilde{T}$.

Závěr: funkce $F(\alpha)$ je spojitá na celém $[p,q]$ pro všechna p,q. Tedy je spojitá i na celém $(1,\infty)$.

Derivace

Spočtěte

9.
$$F(\alpha)=\int_{0}^{\infty}\frac{1-e^{-\alpha x^{2}}}{xe^{x^{2}}}\,\mathrm{d}x\qquad\alpha\in(-1,\infty)$$

Řešení: Uvažujeme $\alpha\in I=(-1,\infty)$, $x\in X=(0,\infty)$, $f(x,\alpha)=\frac{1-e^{-\alpha x^{2}}}{xe^{x^{2}}}$.

- Pro všechna $\alpha\in I$ je $f(x,\alpha)$ spojitá (jako funkce x na X) a tedy měřitelná.
- Pro všechna $x\in X$ a $\alpha\in I$ existuje vlastní

$$\frac{\partial f(x,\alpha)}{\partial\alpha}=xe^{-x^{2}(\alpha+1)}$$

- Volme $\alpha_0=0$. Pak $F(0)=\int_0^{\infty}0=0<\infty$.
- Uvažujme $\alpha\in\overline{I}=(p,\infty)$, $0>p>-1$. Pak existuje majoranta $g(x)=xe^{-x^{2}(p+1)}$ tak, že $\forall x\in X$ je

$$\left|\frac{\partial f(x,\alpha)}{\partial\alpha}\right|=\left|xe^{-x^{2}(\alpha+1)}\right|\le xe^{-x^{2}(p+1)}.$$

  Navíc $\int_0^{\infty}g(x)<\infty$ (u 0 je g spojitá, u ∞ srovnáme s e^{-x} nebo lze přímo upočítat).

- Podmínky věty o derivaci podle parametru jsou tedy splněny na intervalu (p,∞) a můžeme derivovat
$$F'(\alpha)=\int_0^\infty \frac{\partial f(x,\alpha)}{\partial \alpha}\,\mathrm{d}x=\int_0^\infty xe^{-x^2(\alpha+1)}\,\mathrm{d}x=\left[\frac{e^{-x^2(\alpha+1)}}{-2(\alpha+1)}\right]_0^\infty=\frac{1}{2(\alpha+1)}$$
Odtud
$$F(\alpha)=\frac{1}{2}\log(\alpha+1)+c.$$
Protože $F(0)=0$, dopočteme
$$\begin{aligned}0&=\frac{1}{2}\log 1+c\\0&=c\end{aligned}$$
Celkem
$$F(\alpha)=\frac{1}{2}\log(\alpha+1).$$

10.
$$F(\alpha)=\int_0^\infty \frac{1-e^{-\alpha x}}{xe^x}\,\mathrm{d}x \qquad \alpha\in(-1,\infty)$$

Řešení: Uvažujeme $\alpha\in I=(-1,\infty)$, $x\in X=(0,\infty)$, $f(x,\alpha)=\frac{1-e^{-\alpha x}}{xe^x}$.

- Pro všechna $\alpha\in I$ je $f(x,\alpha)$ spojitá (jako funkce x na X) a tedy měřitelná.
- Pro všechna $x\in X$ a $\alpha\in I$ existuje vlastní
$$\frac{\partial f(x,\alpha)}{\partial\alpha}=e^{-(\alpha+1)x}$$
- Volme $\alpha_0=0$. Pak $F(0)=\int_0^\infty 0=0<\infty$.
- Uvažujme $\alpha\in\overline{I}=(p,\infty)$, $0>p>-1$. Pak existuje majoranta $g(x)=e^{-x(p+1)}$ tak, že $\forall x\in X$ je
$$\left|\frac{\partial f(x,\alpha)}{\partial\alpha}\right|=\left|e^{-x(\alpha+1)}\right|\le e^{-x(p+1)}.$$
Navíc $\int_0^\infty g(x)<\infty$ (lze přímo upočítat).
- Podmínky věty o derivaci podle parametru jsou tedy splněny na intervalu (p,∞) a můžeme derivovat
$$F'(\alpha)=\int_0^\infty \frac{\partial f(x,\alpha)}{\partial \alpha}\,\mathrm{d}x=\int_0^\infty e^{-x(\alpha+1)}\,\mathrm{d}x=\left[\frac{e^{-x(\alpha+1)}}{-(\alpha+1)}\right]_0^\infty=\frac{1}{(\alpha+1)}$$
Odtud
$$F(\alpha)=\log(\alpha+1)+c.$$
Protože $F(0)=0$, dopočteme
$$\begin{aligned}0&=\log 1+c\\0&=c\end{aligned}$$
Celkem
$$F(\alpha)=\log(\alpha+1).$$

11.

$$F(\alpha) = \int_0^\infty \frac{1 - e^{-\alpha x^2}}{x^2 e^{x^2}}\, \mathrm{d}x \qquad \alpha \in [-1, \infty)$$

Řešení: Uvažujeme $\alpha \in I = (-1, \infty)$, $x \in X = (0, \infty)$, $f(x, \alpha) = \frac{1-e^{-\alpha x^2}}{x^2 e^{x^2}}$.

- Pro všechna $\alpha \in I$ je $f(x, \alpha)$ spojitá (jako funkce x na X) a tedy měřitelná.
- Pro všechna $x \in X$ a $\alpha \in I$ existuje vlastní
$$\frac{\partial f(x, \alpha)}{\partial \alpha} = e^{-x^2(\alpha+1)}$$
- Volme $\alpha_0 = 0$. Pak $F(0) = \int_0^\infty 0 = 0 < \infty$.
- Uvažujme $\alpha \in \overline{I} = (p, \infty)$, $0 > p > -1$. Pak existuje majoranta $g(x) = e^{-x^2(p+1)}$ tak, že $\forall x \in X$ je
$$\left|\frac{\partial f(x, \alpha)}{\partial \alpha}\right| = \left|e^{-x^2(\alpha+1)}\right| \leq e^{-x^2(p+1)}.$$
Navíc $\int_0^\infty g(x) < \infty$ (u 0 je g spojitá, u ∞ srovnáme s $e^{-x(p+1)}$.)
- Podmínky věty o derivaci podle parametru jsou tedy splněny na intervalu (p, ∞) a můžeme derivovat
$$F'(\alpha) = \int_0^\infty \frac{\partial f(x, \alpha)}{\partial \alpha}\, \mathrm{d}x = \int_0^\infty e^{-x^2(\alpha+1)}\, \mathrm{d}x = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{\alpha+1}}$$
Odtud
$$F(\alpha) = \sqrt{\pi}\sqrt{\alpha+1} + c.$$
Protože $F(0) = 0$, dopočteme
$$\begin{aligned} 0 &= \sqrt{\pi}\sqrt{0+1} + c \\ -\sqrt{\pi} &= c \end{aligned}$$
Celkem
$$F(\alpha) = \sqrt{\pi}(\sqrt{\alpha+1} - 1), \qquad \alpha > -1.$$
- Zbývá upočítat, že $F(-1) = -\sqrt{\pi}$. K tomu stačí ukázat spojitost funkce $F(\alpha)$ v -1 zprava. Ověříme větu o spojitosti dle parametru:
Uvažujeme $\alpha \in T = [-1, 0]$, $x \in X = (0, \infty)$, $f(x, \alpha) = \frac{1-e^{-\alpha x^2}}{x^2 e^{x^2}}$.
  - zafixujeme $\alpha \in T$. Pak funkce $f(x, \alpha)$ je spojitá (jako funkce x) na celém X a tedy je měřitelná.
  - zafixujeme $x \in X$. Pak funkce $f(x, \alpha)$ je spojitá (jako funkce α) na celém T.
  - položme $g(x) = \frac{e^{x^2}-1}{x^2 e^{x^2}}$. Pak $g \in L^1(X)$ a platí
$$\left|\frac{1 - e^{-\alpha x^2}}{x^2 e^{x^2}}\right| \leq \frac{e^{x^2} - 1}{x^2 e^{x^2}}$$

Tedy funkce je spojitá zprava v bodě -1 a odtud

$$F(-1) = \lim_{\alpha \to -1+} \sqrt{\pi}(\sqrt{\alpha+1} - 1) = -\sqrt{\pi}.$$

12. $F(\alpha) = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\arctan(\alpha \operatorname{tg} x)}{\operatorname{tg} x} \,\mathrm{d}x, \qquad \alpha \in \mathbb{R}$

Hint: $\int_0^{\pi/2} \frac{1}{1+\alpha^2 \operatorname{tg}^2 x} \,\mathrm{d}x = \frac{\pi}{2} \frac{1}{1+\alpha}$.

Řešení: Zřejmě $F(0) = 0$, navíc je $F(\alpha)$ lichá funkce, stačí tedy uvažovat $\alpha > 0$.

Položme $\alpha \in I = (0, \infty)$, $x \in X = (0, \frac{\pi}{2})$, $f(x, \alpha) = \frac{\arctan(\alpha \tan x)}{\tan x}$.

- Pro všechna $\alpha \in I$ je $f(x, \alpha)$ spojitá (jako funkce x na X) a tedy měřitelná.
- Pro všechna $x \in X$ a $\alpha \in I$ existuje vlastní
$$\frac{\partial f(x, \alpha)}{\partial \alpha} = \frac{1}{1 + \alpha^2 \tan^2 x}.$$
- Volme $\alpha_0 = 1$. Pak $F(1) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\arctan(\tan x)}{\tan x} \,\mathrm{d}x < \infty$, u 0 i u $\frac{\pi}{2}$ lze spojitě dodefinovat.
- Existuje majoranta $g(x) = 1$ tak, že $\forall x \in X$ je
$$\left| \frac{\partial f(x, \alpha)}{\partial \alpha} \right| = \left| \frac{1}{1 + \alpha^2 \tan^2 x} \right| \leq 1$$
Navíc $\int_0^{\frac{\pi}{2}} g(x) < \infty$.
- Podmínky věty o derivaci podle parametru jsou tedy splněny na intervalu $(-\infty, \infty)$ a můžeme derivovat
$$F'(\alpha) = \int_0^{\infty} \frac{\partial f(x, \alpha)}{\partial \alpha} \,\mathrm{d}x = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{1 + \alpha^2 \tan^2 x} \,\mathrm{d}x.$$
Použijeme substituci $t = \tan x$, pak $\mathrm{d}x = \frac{1}{1+t^2} \,\mathrm{d}t$ a dostaneme (pro $\alpha \neq 1$):
$$\begin{aligned}\int_0^{\infty} \frac{1}{(1+\alpha^2 t^2)(1+t^2)} \,\mathrm{d}t &= \int_0^{\infty} \frac{\alpha^2}{(\alpha^2-1)(1+\alpha^2 x^2)} - \frac{1}{(\alpha^2-1)(1+x^2)} \,\mathrm{d}x \\ &= \frac{\alpha^2}{(\alpha^2-1)\alpha} \left[\arctan(\alpha x)\right]_{x=0}^{\infty} - \frac{1}{\alpha^2-1} \left[\arctan x\right]_{x=0}^{\infty} \\ &= \frac{\pi}{2} \cdot \frac{1}{\alpha+1}\end{aligned}$$
Odtud
$$F(\alpha) = \frac{\pi}{2} \log(1+\alpha) + c$$
Za předpokladu, že F je spojitá v 0, můžeme dopočítat konstantu c. Protože $F(0) = 0$, máme
$$\begin{aligned}0 &= \frac{\pi}{2} \log(1+0) + c \\ 0 &= c\end{aligned}$$
Celkem
$$F(\alpha) = \frac{\pi}{2} \log(1+\alpha) \qquad \alpha > 0, \alpha \neq 1.$$

- Zbývá ověřit spojitost v 0 a v 1. Ověříme větu o spojitosti dle parametru: Uvažujeme $\alpha \in T = [0,2]$, $x \in X = (0, \frac{\pi}{2})$, $f(x,\alpha) = \frac{\arctan(2\tan x)}{\tan x}$.
  - zafixujeme $\alpha \in T$. Pak funkce $f(x,\alpha)$ je spojitá (jako funkce x) na celém X a tedy je měřitelná.
  - zafixujeme $x \in X$. Pak funkce $f(x,\alpha)$ je spojitá (jako funkce α) na celém T.
  - položme $g(x) = \frac{\arctan(2\tan x)}{\tan x}$. Pak $g \in L^1(X)$ a platí

$$\left|\frac{\arctan(\alpha \tan x)}{\tan x}\right| \le \frac{\arctan(2\tan x)}{\tan x}$$

  Tedy funkce je spojitá zprava v bodě 0 a spojitá v bodě 1 a odtud

$$F(\alpha) = \frac{\pi}{2}\log(1+\alpha) \qquad \alpha \ge 0.$$

  Navíc $F(-|\alpha|) = -F(|\alpha|) = -\log(1+|\alpha|)$.

13. Spočtěte

$$F(a) = \int_0^\infty \frac{\log(1+ax^2)}{1+x^2}\,\mathrm{d}x$$

Řešení: Pro $a < 0$ integrál nemá smysl, protože v integračním oboru lze nalézt interval kladné délky, na němž integrand není definován.

Pro $a = 0$ je zřejmě $F(0) = 0$.

Pro $a \ge 0$, $a \ne 1$ spočteme pomocí derivace:

$$\begin{aligned}
F'(a) &= \int_0^\infty \frac{\partial}{\partial a}\frac{\log(1+ax^2)}{1+x^2}\,\mathrm{d}x = \int_0^\infty \frac{x^2}{(1+x^2)(1+ax^2)}\,\mathrm{d}x \\
&= \int_0^\infty \frac{1}{a-1}\Big(\frac{1}{1+x^2} - \frac{1}{1+ax^2}\Big)\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{a-1}\Big(\Big[\arctan x\Big]_{x=0}^\infty - \Big[\frac{\arctan(\sqrt{a}\,x)}{\sqrt{a}}\Big]_{x=0}^\infty\Big) \\
&= \frac{\pi}{2(a-1)}\Big(1 - \frac{1}{\sqrt{a}}\Big) \\
&= \frac{\pi}{2\sqrt{a}(\sqrt{a}+1)}
\end{aligned}$$

Pak

$$F(a) = \pi\log(1+\sqrt{a}) + c.$$

Za předpokladu, že $F(a)$ je spojitá v 0, lze dosadit.

$$0 = F(0) = \pi\log(1+\sqrt{0}) + c$$

tedy pro $a \ge 0$, $a \ne 1$ máme

$$F(a) = \pi\log(1+\sqrt{a}) + 0.$$

Nyní ověřme podmínky věty o derivaci podle parametru:

Položme $a \in I = (0,\infty)$, $x \in X = (0,\infty)$, $f(x,a) = \frac{\log(1+ax^2)}{1+x^2}$.

- Pro všechna $a \in I$ je $f(x,a)$ spojitá (jako funkce x na X) a tedy měřitelná.
- Pro všechna $x \in X$ a $a \in I$ existuje vlastní
$$\frac{\partial f(x,a)}{\partial a} = \frac{x^2}{(1+x^2)(1+ax^2)}$$
- Volme $a = 2$. Pak $F(2) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\log(1+2x^2)}{1+x^2}\,\mathrm{d}x < \infty$.
- Uvažujme $\bar{I} = (p, \infty)$, $1 > p > 0$. Pak existuje majoranta $g(x) = \frac{x^2}{(1+x^2)(1+px^2)}$ tak, že $\forall x \in X$ je
$$\left|\frac{\partial f(x,a)}{\partial a}\right| = \left|\frac{x^2}{(1+x^2)(1+ax^2)}\right| \leq \left|\frac{x^2}{(1+x^2)(1+px^2)}\right|$$
Navíc $\int_0^\infty g(x) < \infty$.

Ještě je potřeba ukázat spojitost $F(a)$ v 0 a 1:

- Uvažujeme $a \in T = [0,2]$, $x \in X = (0,\infty)$, $f(x,a) = \frac{\ln(1+ax^2)}{(1+x^2)}$.
- zafixujeme $a \in T$. Pak funkce $f(x,a)$ je spojitá (jako funkce x) na celém X a tedy je měřitelná.
- zafixujeme $x \in X$. Pak funkce $f(x,\alpha)$ je spojitá (jako funkce α) na celém T.
- položme $g(x) = \frac{\ln(1+2x^2)}{1+x^2}$. Pak $g \in L^1(X)$ a platí
$$\left|\frac{\ln(1+ax^2)}{(1+x^2)}\right| \leq \frac{\ln(1+2x^2)}{(1+x^2)}$$
Integrovatelnost $g(x)$ u ∞ ukážeme např. LSK s $h(x) = \frac{\sqrt{x}}{1+x^2}$.

Závěr: funkce $F(a)$ je spojitá na celém T.

Celkem:
$$F(a) = \pi \log(1+\sqrt{a}), \qquad a \geq 0.$$

14. Spočtěte
$$F(a) = \int_0^\infty \frac{1-e^{-a^2x^2}}{x^2}\,dx.$$

Řešení: Máme
$$F'(a) = 2a\int_0^\infty e^{-a^2x^2}\,dx = 2\operatorname{sgn} a \int_0^\infty e^{-t^2}\,dt = \pm\sqrt{\pi} \qquad (t = |a|\,x,\ a \neq 0).$$
Majoranta pro derivaci $qe^{-p^2x^2}$ pro $p < |a| < q$, $q > p > 0$. Máme
$$F(a) = \sqrt{\pi}\,a + C_1, \quad a > 0; \quad F(a) = -\sqrt{\pi}\,a + C_2, \quad a < 0.$$
Přímým výpočtem dostaneme $F(0) = 0$. Abychom odtud učinili závěr, že $F(a) = \sqrt{\pi}|a|$, $a \in \mathbb{R}$, musíme ještě ověřit spojitost F aspoň v nule. Majoranta pro spojitost je $\frac{1-e^{-q^2x^2}}{x^2}$ pro $|a| < q$, $q > 0$.

15. Spočtěte

$$F(a)=\int_0^\infty \frac{\ln(1+ax^2)}{x^2(1+x^2)}\,\mathrm{d}x.$$

Řešení:

- Pro $a<0$ integrand není definován na množině kladné míry, pro $a=0$ je konstantní nula, tedy $F(0)=0$. Pro $a>0$ konverguje, srovnám s $a/(1+x^2)$ u nuly i nekonečna (u ∞ lze použít odhad $s\geq \log(1+s)$).

- Výpočet: Na dluh prohodíme derivaci a integrál:

$$F'(a)=\int_0^\infty \frac{1}{(1+x^2)(1+ax^2)}\,\mathrm{d}x$$

Pro $a\neq 1$ rozložíme na parciální zlomky

$$\begin{aligned}F'(a)&=\int_0^\infty \frac{1}{(1+x^2)(1+ax^2)}\,\mathrm{d}x=\int_0^\infty \frac{a}{(a-1)(1+ax^2)}-\frac{1}{(a-1)(1+x^2)}\,\mathrm{d}x\\&=\frac{a}{(a-1)\sqrt{a}}\left[\arctan(x\sqrt{a})\right]_{x=0}^\infty-\frac{1}{a-1}\left[\arctan x\right]_{x=0}^\infty\\&=\frac{\pi(\sqrt{a}-1)}{2(a-1)}=\frac{\pi}{2(\sqrt{a}+1)}.\end{aligned}$$

Odtud

$$F(a)=\pi\sqrt{a}-\pi\log(\sqrt{a}+1)+C.$$

Za předpokladu, že $F(a)$ je spojitá v 0, můžeme dosadit

$$0=F(0)=\pi\sqrt{0}-\pi\log(\sqrt{0}+1)+C.$$

Tedy $C=0$ a

$$F(a)=\pi\sqrt{a}-\pi\log(\sqrt{a}+1)\qquad a\in[0,\infty)\setminus\{a\}.$$

Pokud ukážeme, že F je spojitá v 1, můžeme psát

$$F(a)=\pi\sqrt{a}-\pi\log(\sqrt{a}+1)\qquad a\in[0,\infty).$$

- Předpoklady užitých vět. Věta o derivaci podle parametru:
  - $a\in I=(0,\infty)$, $x\in(0,\infty)$, $f(x,a)=\frac{\ln(1+ax^2)}{x^2(1+x^2)}$ Pro všechna $a\in I$ je $f(x,a)$ spojitá (jako funkce x na X) a tedy měřitelná.
  - Pro všechna $x\in X$ a $a\in I$ existuje vlastní

$$\frac{\partial f(x,a)}{\partial a}=\frac{1}{(1+x^2)(1+ax^2)}$$

  - Volme $a=\frac{1}{2}$. Pak $F(\frac{1}{2})=\int_0^\infty f(\frac{1}{2})<\infty$. (Ukázali jsme na začátku LSK.)

– Existuje majoranta $g(x) = \frac{1}{1+x^2}$ tak, že $\forall x \in X$ je

$$\left|\frac{\partial f(x,\alpha)}{\partial \alpha}\right| = \left|\frac{1}{(1+x^2)(1+ax^2)}\right| \leq \frac{1}{1+x^2}$$

Navíc $\int_0^\infty g(x) < \infty$.

Spojitost v 0 a 1:

– Uvažujeme $a \in T = [0,2]$, $x \in X = (0,\infty)$, $f(x,a) = \frac{\ln(1+ax^2)}{x^2(1+x^2)}$.
– zafixujeme $a \in T$. Pak funkce $f(x,a)$ je spojitá (jako funkce x) na celém X a tedy je měřitelná.
– zafixujeme $x \in X$. Pak funkce $f(x,\alpha)$ je spojitá (jako funkce α) na celém T.
– položme $g(x) = \frac{2}{1+x^2}$. Pak $g \in L^1(X)$ a platí

$$\left|\frac{\ln(1+ax^2)}{x^2(1+x^2)}\right| \leq \frac{2}{1+x^2}$$

Závěr: funkce $F(\alpha)$ je spojitá na celém T.

Bonus

16. Ukažte, že funkce $F(\alpha) = \int_0^\infty \frac{e^{-\alpha x}}{1+x^2}\,\mathrm{d}x$ konverguje pro $\alpha \geq 0$ a pro $\alpha \in (0,\infty)$ splňuje diferenciální rovnici $F'' + F = \frac{1}{\alpha}$.

Řešení: Funkce konverguje pro $\alpha \geq 0$, u 0 je spojitá, u ∞ SK s $\frac{1}{1+x^2}$.

Dále potřebujeme dvakrát zderivovat funkci F.

První derivace:

Uvažujeme $\alpha \in I = (0,\infty)$, $x \in X = (0,\infty)$, $f(x,\alpha) = \frac{e^{-\alpha x}}{1+x^2}$.

- Pro všechna $\alpha \in I$ je $f(x,\alpha)$ spojitá (jako funkce x na X) a tedy měřitelná.
- Pro všechna $x \in X$ a $\alpha \in I$ existuje vlastní

$$\frac{\partial f(x,\alpha)}{\partial \alpha} = \frac{-xe^{-\alpha x}}{1+x^2}$$

- Volme $\alpha_0 = 1$. Pak $F(1) = \int_0^\infty \frac{e^{-x}}{1+x^2} < \infty$ (konvergence už zdůvodněna výše).
- Uvažujme $\alpha \in \overline{I} = (p,\infty)$, $1 > p > 0$. Pak existuje majoranta $g(x) = \frac{xe^{-px}}{1+x^2}$ tak, že $\forall x \in X$ je

$$\left|\frac{\partial f(x,\alpha)}{\partial \alpha}\right| = \left|\frac{-xe^{-\alpha x}}{1+x^2}\right| \leq \frac{xe^{-px}}{1+x^2}$$

Navíc $\int_0^\infty g(x) < \infty$ (u 0 je g spojitá, u ∞ srovnáme s xe^{-px}).

- Podmínky věty o derivaci podle parametru jsou tedy splněny na intervalu (p,∞) a můžeme derivovat

$$F'(\alpha) = \int_0^\infty \frac{\partial f(x,\alpha)}{\partial \alpha}\,\mathrm{d}x = \int_0^\infty \frac{-xe^{-\alpha x}}{1+x^2}\,\mathrm{d}x$$

Druhá derivace:

Uvažujeme $\alpha \in I = (0, \infty)$, $x \in X = (0, \infty)$, $f(x, \alpha) = \frac{-xe^{-\alpha x}}{1+x^2}$.

- Pro všechna $\alpha \in I$ je $f(x, \alpha)$ spojitá (jako funkce x na X) a tedy měřitelná.
- Pro všechna $x \in X$ a $\alpha \in I$ existuje vlastní
$$\frac{\partial f(x, \alpha)}{\partial \alpha} = \frac{x^2 e^{-\alpha x}}{1 + x^2}$$
- Volme $\alpha_0 = 1$. Pak $F(1) = \int_0^\infty \frac{-xe^{-x}}{1+x^2} < \infty$ (konvergence plyne ze SK s xe^{-x}).
- Uvažujme $\alpha \in \overline{I} = (p, \infty)$, $1 > p > 0$. Pak existuje majoranta $g(x) = \frac{x^2 e^{-px}}{1+x^2}$ tak, že $\forall x \in X$ je
$$\left| \frac{\partial f(x, \alpha)}{\partial \alpha} \right| = \left| \frac{x^2 e^{-\alpha x}}{1 + x^2} \right| \leq \frac{x^2 e^{-px}}{1 + x^2}$$
Navíc $\int_0^\infty g(x) < \infty$ (u 0 je g spojitá, u ∞ srovnáme s $x^2 e^{-px}$).
- Podmínky věty o derivaci podle parametru jsou tedy splněny na intervalu (p, ∞) a můžeme derivovat
$$F''(\alpha) = \int_0^\infty \frac{\partial f(x, \alpha)}{\partial \alpha} \, \mathrm{d}x = \int_0^\infty \frac{x^2 e^{-\alpha x}}{1 + x^2} \, \mathrm{d}x$$

Diferenciální rovnice:
$$F''(\alpha) + F(\alpha) = \int_0^\infty \frac{e^{-\alpha x}(x^2 + 1)}{1 + x^2} \, \mathrm{d}x = \int_0^\infty e^{-\alpha x} \, \mathrm{d}x = \left[\frac{e^{-\alpha x}}{-\alpha} \right]_0^\infty = \frac{1}{\alpha}$$

17. Vyjádřete jako součet řady funkce $G(a)$ i $G'(a)$, kde
$$G(a) = \int_0^1 x^a \arctan x \, dx.$$

Řešení:

- Integrál konverguje pro $a > -2$. Pomocí Taylora $\arctan x$ dostaneme
$$G(a) = \int_0^1 \Big(\sum_{k=0}^\infty (-1)^k x^a \frac{x^{2k+1}}{2k+1} \Big) \, dx = \sum_{k=0}^\infty \int_0^1 (-1)^k x^a \frac{x^{2k+1}}{2k+1} \, dx$$
$$= \sum_{k=0}^\infty (-1)^k \frac{1}{(a + 2k + 2)(2k + 1)}.$$

  Prohození řady a integrálu:
$$= \sum_{k=0}^\infty \int_0^1 \left| (-1)^k x^a \frac{x^{2k+1}}{2k+1} \right| \, dx = \sum_{k=0}^\infty \frac{1}{(a + 2k + 2)(2k + 1)} < \infty.$$

  (srovnání s $\sum \frac{1}{k^2}$.)

- Na dluh prohodíme derivaci a integrál, pak

$$
\begin{aligned}
G'(a) &= \int_0^1 x^a \log x \arctan x \, dx \\
&= \int_0^1 \Big(\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k x^a \log x \frac{x^{2k+1}}{2k+1} \Big) \, dx = \sum_{k=0}^{\infty} \int_0^1 (-1)^k x^a \log x \frac{x^{2k+1}}{2k+1} \, dx \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{1}{(a+2k+2)^2 (2k+1)}.
\end{aligned}
$$

Prohození řady a integrálu:

$$
\sum_{k=0}^{\infty} \int_0^1 \left| (-1)^k x^a \log x \frac{x^{2k+1}}{2k+1} \right| \, dx = \sum_{k=0}^{\infty} \int_0^1 -x^a \log x \frac{x^{2k+1}}{2k+1} \, dx = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(a+2k+2)^2(2k+1)}.
$$

Prohození derivace a integrálu:

  - zafixujme $0 > p > -2$. Pak uvažujme $a \in I = (p, \infty)$, $x \in (0,1)$, $f(x,a) = x^a \arctan x$.
  - Pro všechna $a \in I$ je $f(x,a)$ spojitá (jako funkce x na X) a tedy měřitelná.
  - Pro všechna $x \in X$ a $a \in I$ existuje vlastní

$$
\frac{\partial f(x,a)}{\partial a} = x^a \log x \arctan x
$$

  - Volme $a = 0$. Pak $G(0) = \int_0^1 \arctan x < \infty$. (Lze upočítat.)
  - Existuje majoranta $g(x) = |x^p \log x \arctan x|$ tak, že $\forall x \in X$ je

$$
\left| \frac{\partial f(x,\alpha)}{\partial \alpha} \right| = |x^a \log x \arctan x| \leq |x^p \log x \arctan x|
$$

    Navíc $\int_0^1 g(x) < \infty$.