13. cvičení – Integrál závislý na parametru

https://www2.karlin.mff.cuni.cz/~kuncova/vyuka.php, kuncova@karlin.mff.cuni.cz

Teorie

Věta 1 (Spojitost integrálu závislého na parametru)**.** *Nechť T je metrický prostor, $\alpha_0 \in T$ a nechť $f : X \times T \to \mathbb{R}$ má následující vlastnosti:*

(Sp-1) *pro všechna $\alpha \in T$ je funkce $x \to f(x, \alpha)$ měřitelná,*

(Sp-2) *pro všechna $x \in X$ je funkce $\alpha \to f(x, \alpha)$ spojitá v α_0,*

(Sp-3) *existuje funkce $g \in L^1(X, \mu)$ tak, že $|f(x, \alpha)| \leq g(x)$ pro všechna $x \in X$ a $\alpha \in T$.*

Potom $F(\alpha) = \int_X f(x, \alpha)\, \mathrm{d}\mu(x)$, $\alpha \in T$, je spojitá v bodě α_0.

Věta 2 (Derivace integrálu závislého na parametru)**.** *Nechť $I \subset \mathbf{R}$ je otevřený interval. Nechť funkce $f : X \times I \to \mathbb{R}$ má následující vlastnosti:*

(De-1) *pro všechna $\alpha \in I$ je funkce $x \to f(x, \alpha)$ měřitelná,*

(De-2) *pro všechna $x \in X$ a $\alpha \in I$ existuje vlastní $\frac{\partial f(x,\alpha)}{\partial \alpha}$,*

(De-3) *existuje funkce $g \in L^1(X, \mu)$ tak, že pro všechna $x \in X$ a $\alpha \in I$ je*

$$\left| \frac{\partial f}{\partial \alpha}(x, \alpha) \right| \leq g(x),$$

(De-4) *existuje $\alpha_0 \in I$ tak, že $F(\alpha_0) = \int_X f(x, \alpha_0)\, \mathrm{d}\mu(x) \in \mathbf{R}$ (je konečný).*

Potom pro všechna $\alpha \in I$ je $F(\alpha) = \int_X f(x, \alpha)\, \mathrm{d}\mu(x) \in \mathbf{R}$, existuje derivace této funkce a

$$F'(\alpha) = \int_X \frac{\partial f(x, \alpha)}{\partial \alpha}\, d\mu(x)\,.$$

Věta 3. Funkce f je **spojitá** v intervalu (p, q) právě tehdy, když je spojitá v každém intervalu $[p_0, q_0] \subset (p, q)$.

Funkce f je **spojitá** v intervalu (p, q) právě tehdy, když je spojitá v každém intervalu $(p_0, q_0] \subset (p, q)$. Analogicky s intervaly $[p_0, q_0) \subset (p, q)$.

Algoritmus pro spojitost

1. Najdeme T, X a f.
2. Zafixujeme α a určíme, zda je $f(x, \alpha)$ **měřitelná** jako funkce x.
3. Zafixujeme x a určíme, zda je $f(x, \alpha)$ **spojitá** jako funkce α.
4. Najdeme **majorantu** $g \in L^1(X)$, tak že $|f(x, \alpha)| \leq g(x)$. **Nesmí** záviset na α.
5. Pozn.:
   (a) Spojitost možno ověřovat i na menších intervalech typu $[p, q]$ a pak „roztáhnout“.
   (b) Majorantu možno hledat nadvakrát, např. zvlášť na intervalu $(0, 1)$ a $[1, \infty)$.

Algoritmus pro derivaci

1. Najdeme I, X a f.
2. Zafixujeme α a určíme, zda je $f(x,\alpha)$ **měřitelná** jako funkce x.
3. Zafixujeme x a α a určíme, zda je $\frac{\partial f(x,\alpha)}{\partial \alpha}$ vlastní (spočteme ji).
4. Najdeme **majorantu** pro **derivaci**: hledáme $g \in L^1(X)$, tak že $|\frac{\partial f}{\partial \alpha}(x,\alpha)| \leq g(x)$. **Nesmí** záviset na α.
5. Najdeme jedno konkrétní α_0 tak, že $F(\alpha_0) = \int_X f(x,\alpha_0)\,\mathrm{d}\mu(x)$ je konečný. Pozor, toto α_0 musí být v I.
6. Zderivujeme uvnitř integrálu podle α.
7. Pokud to lze, nový integrál spočteme. Získáme tak $F'(\alpha)$.
8. Pokud to lze, spočítáme odtud $F(\alpha)$. Nezapomeneme na **konstantu**. Dosadíme hezké α_0 a získáme hodnotu konstanty.
9. Pozn.:
   (a) Derivovat možno i na menších intervalech typu (p,q) a pak „roztáhnout“.
   (b) Spočtené $F(\alpha)$ na intervalu (a,b) možno „roztáhnout“ i na intervaly typu $[a,b)$, pokud ukážeme spojitost $F(\alpha)$ v bodě a.

Spojitost

1. Ukažte, že funkce $F(\alpha) = \displaystyle\int_0^\infty \frac{e^{-\alpha x}}{1+x^2}\,\mathrm{d}x$, je spojitá v intervalu $[0,\infty)$.

2.❀ Ukažte, že funkce $F(\alpha) = \displaystyle\int_0^\infty e^{-\alpha x}\,\mathrm{d}x$, je spojitá v intervalu $(0,\infty)$.

3.❀ Ukažte, že funkce $F(\alpha) = \displaystyle\int_0^\infty \frac{x^{\alpha-1}}{1+x}\,\mathrm{d}x$, je spojitá v intervalu $(0,1)$.

4.✻ Ukažte, že funkce $F(\alpha) = \displaystyle\int_0^\infty \frac{\ln(1+\alpha^2x^2)}{x^2}\,\mathrm{d}x$, je spojitá v intervalu $(-\infty,\infty)$.

5.✿ Ukažte, že funkce $F(\alpha) = \displaystyle\int_0^1 \operatorname{sgn}(x-\alpha)\,\mathrm{d}x$, je spojitá v intervalu $(-\infty,\infty)$.

6. Ukažte, že funkce $F(\alpha) = \displaystyle\int_0^\infty x^{\alpha-1}e^{-x}\,\mathrm{d}x$, (tzv. Gamma funkce) je spojitá v intervalu $(0,\infty)$.

7. Ukažte, že funkce $F(\alpha) = \displaystyle\int_0^\infty \frac{x}{2+x^\alpha}\,\mathrm{d}x$, je spojitá v intervalu $(2,\infty)$.

8. Ukažte, že funkce $F(\alpha) = \displaystyle\int_{\frac{1}{2}}^\infty \frac{\cos x}{x^\alpha}\,\mathrm{d}x$, je spojitá v intervalu $(1,\infty)$.

Derivace

Spočtěte

9.❋ $F(\alpha) = \displaystyle\int_0^\infty \frac{1-e^{-\alpha x^2}}{xe^{x^2}}\,\mathrm{d}x \qquad \alpha \in (-1,\infty)$

10.♡ $F(\alpha) = \displaystyle\int_0^\infty \frac{1-e^{-\alpha x}}{xe^{x}}\,\mathrm{d}x \qquad \alpha \in (-1,\infty)$

11.❆ $F(\alpha) = \displaystyle\int_0^\infty \frac{1-e^{-\alpha x^2}}{x^2e^{x^2}}\,\mathrm{d}x \qquad \alpha \in [-1,\infty)$

12.❀ $F(\alpha) = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\arctan(\alpha \operatorname{tg} x)}{\operatorname{tg} x}\,\mathrm{d}x, \qquad \alpha \in \mathbb{R}$

Hint: $\int_0^{\pi/2} \frac{1}{1+\alpha^2 \operatorname{tg}^2 x}\,\mathrm{d}x = \frac{\pi}{2}\frac{1}{1+\alpha}$.

13.✪ $F(a) = \displaystyle\int_0^\infty \frac{\log(1+ax^2)}{1+x^2}\,\mathrm{d}x, \qquad a \geq 0.$

14.❇ $F(a) = \displaystyle\int_0^\infty \frac{1-e^{-a^2x^2}}{x^2}\,dx, \qquad a \in \mathbb{R}.$

15.✤ $F(a) = \displaystyle\int_0^\infty \frac{\ln(1+ax^2)}{x^2(1+x^2)}\,\mathrm{d}x, \qquad a \geq 0.$

Bonus

16. Ukažte, že funkce $F(\alpha) = \int_0^\infty \frac{e^{-\alpha x}}{1+x^2}\,\mathrm{d}x$ konverguje pro $\alpha \geq 0$ a pro $\alpha \in (0,\infty)$ splňuje diferenciální rovnici $F'' + F = \frac{1}{\alpha}$.

17. Vyjádřete jako součet řady funkce $G(a)$ i $G'(a)$, kde

$$G(a) = \int_0^1 x^a \arctan x\,dx.$$

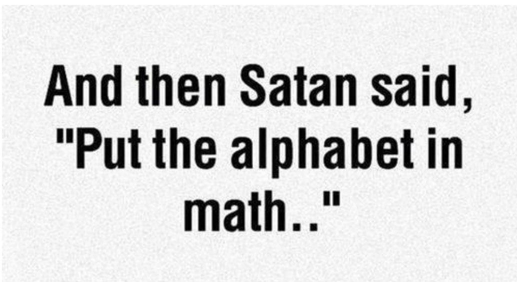

Figure 1: http://www.lovethispic.com/image/99563/and-then-satan-said,-put-the-alphabet-in-math

(2) hledejte majorantu na $\alpha \in [\delta, \infty)$.
(3) hledejte majorantu na $\alpha \in [p, q]$. Pak zvlášť pro $x < 1$ a $x \geq 1$.
(4) hledejte majorantu na $\alpha \in [-p, p]$. Pak zvlášť pro $x < 1$ a $x \geq 1$.
(5) spočítejte ručně.
(9) hledejte majorantu na $\alpha \in (p, \infty)$.
(10) hledejte majorantu na $\alpha \in (p, \infty)$.
(11) nakonec ukažte spojitost funkce F v -1 zprava - tuto majorantu hledejte pro $\alpha \in [-1, 0]$.
(12) nutno ukázat spojitost v 0 a v 1.
(13) nutno ukázat spojitost v 0 a v 1.
(14) F je sudá; hledejte majorantu na $\alpha \in (p, q)$.
(15) nutno ukázat spojitost v 0 a v 1.