12. cvičení – Řada a integrál

https://www2.karlin.mff.cuni.cz/~kuncova/vyuka.php, kuncova@karlin.mff.cuni.cz

Příklady

1. Rozviňte do řady

(a) $\displaystyle\int_0^1 \frac{\ln(1+x)}{x}\,\mathrm{d}x = \frac{\pi^2}{12}$

Řešení:

- Rozvoj: Z Taylorova rozvoje máme pro $x \in (-1,1]$

$$\log(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{x^n}{n}$$

Tedy

$$f(x) = \frac{\log(1+x)}{x} = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{x^{n-1}}{n}$$

Počítáme tedy integrál

$$\int_0^1 \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{x^{n-1}}{n}\,\mathrm{d}x$$

- Lebesgueova věta: Ověřujeme

$$\sum_{n=1}^{\infty}\int_0^1 \left|(-1)^{n+1}\frac{x^{n-1}}{n}\right|\mathrm{d}x = \sum_{n=1}^{\infty}\int_0^1 \left|\frac{x^{n-1}}{n}\right|\mathrm{d}x = \sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{x^n}{n^2}\right]_0^1 = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2} < \infty.$$

- Prohození a výpočet:

$$\int_0^1 \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{x^{n-1}}{n}\,\mathrm{d}x = \sum_{n=1}^{\infty}\int_0^1 (-1)^{n+1}\frac{x^{n-1}}{n}\,\mathrm{d}x = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\int_0^1 \frac{x^{n-1}}{n}\,\mathrm{d}x$$
$$= \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\left[\frac{x^n}{n^2}\right]_0^1 = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n^2} = \frac{\pi^2}{12}$$

(b) $\displaystyle\int_0^1 \frac{\ln(1-x)}{x}\,\mathrm{d}x = -\frac{\pi^2}{6}$

Řešení:

- Rozvoj: Z Taylorova rozvoje máme pro $x \in (-1,1]$

$$\log(1-x) = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{(-x)^n}{n} = \sum_{n=1}^{\infty}-\frac{x^n}{n}$$

Tedy

$$f(x) = \frac{\log(1-x)}{x} = \sum_{n=1}^{\infty}-\frac{x^{n-1}}{n}$$

Počítáme tedy integrál

$$\int_0^1 \sum_{n=1}^{\infty} -\frac{x^{n-1}}{n}\,\mathrm{d}x = -\int_0^1 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n-1}}{n}\,\mathrm{d}x$$

- Věta: Levi: funkce $f_n(x) = \frac{x^{n-1}}{n}$ jsou nezáporné a měřitelné (protože spojité).
- Prohození a výpočet:

$$-\int_0^1 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n-1}}{n}\,\mathrm{d}x = -\sum_{n=1}^{\infty} \int_0^1 \frac{x^{n-1}}{n}\,\mathrm{d}x \quad = -\sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{x^n}{n^2}\right]_0^1 = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = -\frac{\pi^2}{6}$$

(c) $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{x}{e^x+1}\,\mathrm{d}x$

Řešení:

- Rozvoj: Nejprve upravíme, pak rozvineme jako geometrickou řadu ($e^{-x} < 1$ na $(0,\infty)$)

$$\frac{x}{e^x+1} = \frac{x}{e^x(1+e^{-x})} = \frac{x}{e^x}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n e^{-xn} = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x e^{-(n+1)x}$$

Počítáme tedy integrál

$$\int_0^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x e^{-(n+1)x}\,\mathrm{d}x$$

- Lebesgueova věta: Ověřujeme

$$\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{\infty} \int_0^{\infty} \left|(-1)^n x e^{-(n+1)x}\right|\mathrm{d}x &= \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^{\infty} x e^{-(n+1)x}\,\mathrm{d}x \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \left[\frac{xe^{-(n+1)x}}{-(n+1)}\right]_0^{\infty} - \int_0^{\infty} \frac{e^{-(n+1)x}}{-(n+1)}\,\mathrm{d}x \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \left[\frac{xe^{-(n+1)x}}{-(n+1)}\right]_0^{\infty} + \left[\frac{e^{-(n+1)x}}{-(n+1)^2}\right]_0^{\infty} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \left(0 + \frac{1}{(n+1)^2}\right) < \infty
\end{aligned}$$

- Prohození a výpočet:

$$\begin{aligned}
\int_0^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x e^{-(n+1)x}\,\mathrm{d}x &= \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \int_0^{\infty} x e^{-(n+1)x}\,\mathrm{d}x \\
&= \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{1}{(n+1)^2} = \frac{\pi^2}{12}
\end{aligned}$$

(d) $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{x}{e^x-1}\,\mathrm{d}x$

Řešení:

- Rozvoj: Nejprve upravíme, pak rozvineme jako geometrickou řadu ($e^{-x} < 1$ na $(0,\infty)$)

$$\frac{x}{e^x - 1} = \frac{x}{e^x(1-e^{-x})} = \frac{x}{e^x}\sum_{n=0}^{\infty} e^{-xn} = \sum_{n=0}^{\infty} xe^{-(n+1)x}$$

Počítáme tedy integrál

$$\int_0^\infty \sum_{n=0}^{\infty} xe^{-(n+1)x}\,\mathrm{d}x$$

- Věta: Levi: funkce $f_n(x) = xe^{-(n+1)x}$ jsou nezáporné a měřitelné (protože spojité).
- Prohození a výpočet:

$$\begin{aligned}\int_0^\infty \sum_{n=0}^{\infty} xe^{-(n+1)x}\,\mathrm{d}x &= \sum_{n=0}^{\infty}\int_0^\infty xe^{-(n+1)x}\,\mathrm{d}x \\ &= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(n+1)^2} = \frac{\pi^2}{6}\end{aligned}$$

(e) $\displaystyle\int_0^1 \ln\frac{1}{1-x}$

Řešení:

- Rozvoj: Ze vzorce a z Taylorova rozvoje máme pro $x \in (-1,1]$

$$\log\frac{1}{1-x} = -\log 1 - x = -\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{(-x)^n}{n} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n}$$

Počítáme tedy integrál

$$\int_0^1 \sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n}\,\mathrm{d}x = \int_0^1 \sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n}\,\mathrm{d}x$$

- Věta: Levi: funkce $f_n(x) = \frac{x^n}{n}$ jsou nezáporné a měřitelné (protože spojité).
- Prohození a výpočet:

$$\int_0^1 \sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n}\,\mathrm{d}x = \sum_{n=1}^{\infty}\int_0^1\frac{x^n}{n}\,\mathrm{d}x \quad = \sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{x^{n+1}}{n(n+1)}\right]_0^1 = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)} = 1$$

(f) $\displaystyle\int_0^1 \ln\frac{1+x}{1-x}\,\mathrm{d}x = 2\ln 2$

Řešení:

- Rozvoj - prve odvodíme Taylorův rozvoj. Pro $x \in (0,1)$ máme

$$\begin{aligned}\log\frac{1+x}{1-x} &= \log(1+x) - \log(1-x) = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{x^n}{n} - \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{(-x)^n}{n} \\ &= 2\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n+1}}{2n+1}\end{aligned}$$

Počítáme tedy integrál

$$\int_0^1 \sum_{n=0}^{\infty} 2\frac{x^{2n+1}}{2n+1}\,\mathrm{d}x =$$

- Věta: Levi: funkce $f_n(x) = 2\frac{x^{2n+1}}{2n+1}$ jsou nezáporné a měřitelné (protože spojité).
- Prohození a výpočet:

$$\begin{aligned}\int_0^1 \sum_{n=0}^{\infty} 2\frac{x^{2n+1}}{2n+1}\,\mathrm{d}x &= \sum_{n=0}^{\infty}\int_0^1 2\frac{x^{2n+1}}{2n+1}\,\mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{\infty}\left[2\frac{x^{2n+2}}{(2n+1)(2n+2)}\right]_0^1 \\ &= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{2}{(2n+1)(2n+2)} = 2\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2n+1} - \frac{1}{(2n+2)} \\ &= 2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n} = 2\log 2\end{aligned}$$

(g) $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{x}\ln\frac{1+x}{1-x}\,\mathrm{d}x = \frac{\pi^2}{4}$

Řešení:

- Rozvoj - z předchozího příkladu plyne

$$\frac{1}{x}\log\frac{1+x}{1-x} = \quad = 2\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n}}{2n+1}$$

Počítáme tedy integrál

$$\int_0^1 \sum_{n=0}^{\infty} 2\frac{x^{2n}}{2n+1}\,\mathrm{d}x =$$

- Věta: Levi: funkce $f_n(x) = 2\frac{x^{2n}}{2n+1}$ jsou nezáporné a měřitelné (protože spojité).
- Prohození a výpočet:

$$\begin{aligned}\int_0^1 \sum_{n=0}^{\infty} 2\frac{x^{2n}}{2n+1}\,\mathrm{d}x &= \sum_{n=0}^{\infty}\int_0^1 2\frac{x^{2n}}{2n+1}\,\mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{\infty}\left[2\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)^2}\right]_0^1 \\ &= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{2}{(2n+1)^2} = \frac{\pi^2}{4}\end{aligned}$$

(h) $\displaystyle\int_0^{\infty} e^{-x}\cos\sqrt{x}\,\mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{n!}{(2n)!}$

Řešení:

- Rozvoj: Z Taylorova rozvoje máme pro $y \in \mathbb{R}$

$$\cos y = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{y^{2n}}{(2n)!}$$

Položme $y = \sqrt{x}$ pro $x \in (0, \infty)$. Dostáváme

$$f(x) = e^{-x} \cos \sqrt{x} = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-x} (-1)^n \frac{x^n}{(2n)!}$$

Počítáme tedy integrál

$$\int_0^1 \sum_{n=0}^{\infty} e^{-x} (-1)^n \frac{x^n}{(2n)!} \, \mathrm{d}x$$

- Lebesgueova věta: Ověřujeme

$$\sum_{n=0}^{\infty} \int_0^1 \left| e^{-x} (-1)^n \frac{x^n}{(2n)!} \right| = \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^1 e^{-x} \frac{x^n}{(2n)!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n)!} \int_0^1 e^{-x} x^n$$

Pomocí per partes lze odvodit $\int_0^\infty e^{-x} x^n \, \mathrm{d}x = n!$. Pak

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n)!} \int_0^1 e^{-x} x^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n!}{(2n)!}$$

Tato řada ale konverguje z d'Alambertova podílového kritéria:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{(n+1)!}{(2n+2)!}}{\frac{n!}{(2n)!}} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)}{(2n+2)(2n+1)} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2(2n+1)} = 0 < 1,$$

tedy řada konverguje.

- Prohození a výpočet:

$$\int_0^1 \sum_{n=0}^{\infty} e^{-x} (-1)^n \frac{x^n}{(2n)!} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \int_0^1 e^{-x} \frac{x^n}{(2n)!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n n!}{(2n)!}$$

(i) $\displaystyle\int_0^1 \frac{x^{p-1}}{1+x^q} \, \mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{p+nq}, \qquad p, q > 0$

Řešení:

- Rozvoj: Z Taylorova rozvoje máme pro $x \in (-1, 1)$

$$\frac{x^{p-1}}{1+x^q} = x^{p-1} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{qn} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{p-1+qn}$$

Tedy

$$f(x) = \frac{\log(1+x)}{x} = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^{n-1}}{n}$$

Počítáme tedy integrál

$$\int_0^1 \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{p-1+qn} \, \mathrm{d}x$$

- Uvažujme posloupnost částečných součtů

$$g_j(x) = \sum_{n=0}^{j} (-1)^n x^{p-1+qn} \,\mathrm{d}x$$

podle vzorce pro částečný součet geometrické řady máme

$$g_j = x^{p-1} \frac{1-(-x^q)^{j+1}}{1+x^q}$$

Hledáme majorantu

$$|g_j| = \left| x^{p-1} \frac{1-(-x^q)^{j+1}}{1+x^q} \right| \leq \left| x^{p-1} \frac{2}{1+x^q} \right|$$

Ale funkce $g(x) = \frac{2x^{p-1}}{1+x^q} \in L^1(0,1)$. (U 0 srovnáme s x^{p-1}.)

- Tedy jsme našli konvergentní majorantu a můžeme prohodit limitu posloupnosti a integrál. (Třetí rovnost plyne z linearity integrálu - jde o konečný součet.)

$$\begin{aligned}
\int_0^1 \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{p-1+qn} \,\mathrm{d}x &= \int_0^1 \lim_{j\to\infty} \sum_{n=0}^{j} (-1)^n x^{p-1+qn} \,\mathrm{d}x \\
&= \lim_{j\to\infty} \int_0^1 \sum_{n=0}^{j} (-1)^n x^{p-1+qn} \,\mathrm{d}x \\
&= \lim_{j\to\infty} \sum_{n=0}^{j} \int_0^1 (-1)^n x^{p-1+qn} \,\mathrm{d}x \\
&= \lim_{j\to\infty} \sum_{n=0}^{j} (-1)^n \int_0^1 x^{p-1+qn} \,\mathrm{d}x \\
&= \lim_{j\to\infty} \sum_{n=0}^{j} (-1)^n \left[\frac{x^{p+nq}}{p+nq} \right]_0^1 \\
&= \lim_{j\to\infty} \sum_{n=0}^{j} \frac{(-1)^n}{p+nq} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{p+nq}
\end{aligned}$$

2. Sečtěte $\sum_{n=1}^{\infty} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1-\sqrt{\sin x})^n \cos x \,\mathrm{d}x$.

Řešení: Příklad i s řešením převzat odtud: https://people.cas.uab.edu/~mosya/teaching/Problems

Protože $f_n = (1-\sqrt{\sin x})^n \cos x$ jsou pro $x \in (0, \frac{\pi}{2})$ nezáporné měřitelné funkce, můžeme prohodit z Leviho věty. Tedy počítáme

$$\sum_{n=1}^{\infty} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1-\sqrt{\sin x})^n \cos x \,\mathrm{d}x = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sum_{n=1}^{\infty} (1-\sqrt{\sin x})^n \cos x \,\mathrm{d}x$$
$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x \sum_{n=1}^{\infty} (1-\sqrt{\sin x})^n \,\mathrm{d}x$$

Upravíme jako geometrickou řadu

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x \sum_{n=1}^{\infty} (1-\sqrt{\sin x})^n \,\mathrm{d}x = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{\sqrt{\sin x}} \,\mathrm{d}x$$

Vyřešíme substitucí $y = \sin x,\ \mathrm{d}y = \cos x \,\mathrm{d}x$:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{\sqrt{\sin x}} \,\mathrm{d}x = \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{y}} \,\mathrm{d}y = [2\sqrt{y}]_0^1 = 2.$$