12. cvičení – Řada a integrál

https://www2.karlin.mff.cuni.cz/~kuncova/vyuka.php, kuncova@karlin.mff.cuni.cz

Teorie

Věta 1 (Leviho pro řady)**.** Nechť $f_n : X \to [0, \infty)$ jsou měřitelné **nezáporné** funkce. Potom

$$\int_X \left(\sum_{n=1}^{\infty} f_n \right) \mathrm{d}\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \int_X f_n \, \mathrm{d}\mu.$$

Věta 2 (Lebesgueova věta pro řady)**.** Nechť $f_n : X \to (-\infty, \infty)$ jsou měřitelné funkce a nechť $\sum_{n=1}^{\infty} \int_X |f_n| \, \mathrm{d}\mu < \infty$. Pak $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ konverguje (absolutně) pro skoro všechna $x \in X$ a

$$\int_X \left(\sum_{n=1}^{\infty} f_n \right) \mathrm{d}\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \int_X f_n \, \mathrm{d}u.$$

Algoritmus

1. Rozvineme funkci do řady pomocí známých **Taylorových řad**.
2. Najdeme a odůvodníme vhodnou větu pro prohození řady a integrálu:
   (a) Jsou funkce f_n **nezáporné**? $\to$ Levi.
   (b) Konverguje **absolutně** $\sum_{n=1}^{\infty} \int_X |f_n|$? $\to$ Lebesgue.
   (c) Jinak: zkusíme sestavit posloupnost částečných součtů a použít Lebesgueovu větu pro posloupnosti.
3. **Prohodíme** řadu a integrál a **spočteme**.
4. Pozn.: Někdy je výhodné počítat v pořadí $\sum \int$ místo $\int \sum$.

Hinty

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{12}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2} = \frac{\pi^2}{8}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = 1$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} q^n = \frac{1}{1-q}, \quad |q| < 1$$

$$\sum_{n=0}^{j} q^n = \frac{1-q^{j+1}}{1-q}, \quad |q| < 1$$

$$\int_0^{\infty} e^{-x} x^n = n!$$

Příklady

1. Rozviňte do řady

(a) $\displaystyle\int_0^1 \frac{\ln(1+x)}{x}\,\mathrm{d}x = \frac{\pi^2}{12}$

(b) $\displaystyle\int_0^1 \frac{\ln(1-x)}{x}\,\mathrm{d}x = -\frac{\pi^2}{6}$

(c)❄ $\displaystyle\int_0^\infty \frac{x}{e^x+1}\,\mathrm{d}x$

(d) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{x}{e^x-1}\,\mathrm{d}x$

(e)♣ $\displaystyle\int_0^1 \ln\frac{1}{1-x}$

(f) $\displaystyle\int_0^1 \ln\frac{1+x}{1-x}\,\mathrm{d}x = 2\ln 2$

(g) $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{x}\ln\frac{1+x}{1-x}\,\mathrm{d}x = \frac{\pi^2}{4}$

(h)✿ $\displaystyle\int_0^\infty e^{-x}\cos\sqrt{x}\,\mathrm{d}x = \sum_{n=0}^\infty (-1)^n\frac{n!}{(2n)!}$

(i)♡ $\displaystyle\int_0^1 \frac{x^{p-1}}{1+x^q}\,\mathrm{d}x = \sum_{n=0}^\infty \frac{(-1)^n}{p+nq},$ $p,q>0$

2. Sečtěte $\displaystyle\sum_{n=1}^\infty \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1-\sqrt{\sin x})^n \cos x\,\mathrm{d}x.$

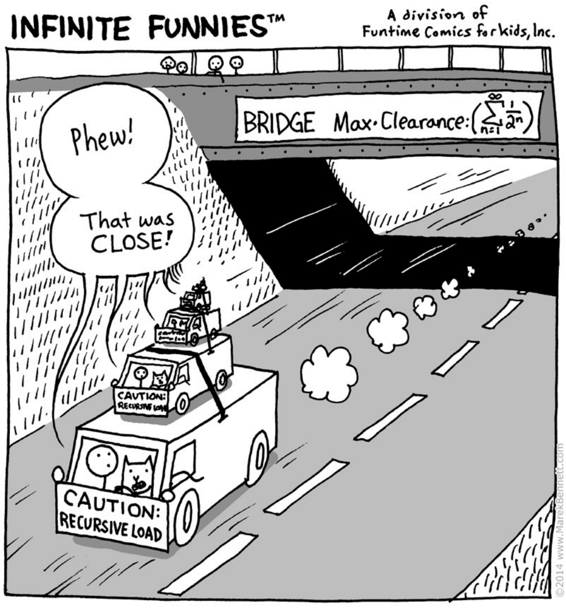

Figure 1: https://marekbennett.com/2014/03/06/recursive-load/

(1c) nejprve ze jmenovatele vytkněte e^x, zbytek rozvíjejte jako geometrickou řadu
(1e) $\log a^{-1} = -\log a$
(1h) konvergence řady z d'Alamberta
(1i) Uvažujte limitu částečných součtů geometrické řady. Prohazujte jako limitu posloupnosti a integrál - Lebesgueova věta pro posloupnosti.