11. cvičení – Lebesgue-Stieltjesův integrál

https://www2.karlin.mff.cuni.cz/~kuncova/vyuka.php, kuncova@karlin.mff.cuni.cz

Příklady

Většinu příkladů z této kapitoly máme ze sbírky Příklady k teorii Lebesgueova integrálu, J. Lukeš: https://matematika.cuni.cz/lukes-pli.html.

1. Spočtěte

   (a) $\lim\limits_{n\to\infty} \int_0^1 \frac{x^n}{n} \, \mathrm{d}x$

   Řešení:

   - Bodová limita: Zafixujeme $x \in (0,1)$. Pak
   $$\lim_{n\to\infty} \frac{x^n}{n} = 0.$$
   Tedy $f(x) = 0$ na $(0,1)$.
   - Lebesgue. Majoranta: $g(x) = 1$,
   $$\frac{x^n}{n} \leq 1$$
   a $\int_0^1 1 = 1 < \infty$.
   - Závěr:
   $$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 \frac{x^n}{n} = \int_0^1 0 = 0.$$

   (b) $\lim\limits_{n\to\infty} \int_0^1 \frac{nx}{1+n^2x^2} \, \mathrm{d}x$

   Řešení:

   - Bodová limita pro $x \in (0,1)$:
   $$\lim_{n\to\infty} \frac{nx}{1+n^2x^2} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \cdot \frac{x}{\frac{1}{n^2} + 2x^2} = 0$$
   - Lebesgue. Majoranta: $g(x) = \frac{1}{2}$, neboť
   $$\begin{aligned} \frac{nx}{1+n^2x^2} &\leq \frac{1}{2} \\ 2nx &\leq 1 + n^2x^2 \\ 0 &\leq 1 - 2nx + n^2x^2 \\ 0 &\leq (1-nx)^2 \end{aligned}$$
   a $\int_0^1 \frac{1}{2} < \infty$.
   - Závěr:
   $$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 \frac{nx}{1+n^2x^2} = \int_0^1 0 = 0$$

(c) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\int_0^1 \frac{x^n}{1+x^{2n}}\,\mathrm{d}x$

Řešení:

- Bodová limita pro $x \in (0,1)$:
$$\lim_{n\to\infty}\frac{x^n}{1+x^{2n}} = \frac{0}{1+0} = 0.$$
- Lebesgue. Majoranta $g(x) = 1$:
$$\frac{x^n}{1+x^{2n}} \le 1$$
$$x^n \le 1 + x^{2n}$$
  a $\int_0^1 1 < \infty$.
- Závěr:
$$\lim_{n\to\infty}\int_0^1 \frac{x^n}{1+x^{2n}} = \int_0^1 0 = 0.$$

(d) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\int_0^\infty \frac{x^n}{1+x^{2n}}\,\mathrm{d}x$

Řešení: Nejprve integrál roztrhneme
$$\int_0^1 \frac{x^n}{1+x^{2n}}\,\mathrm{d}x + \int_1^\infty \frac{x^n}{1+x^{2n}}\,\mathrm{d}x$$
První integrál máme z předchozího příkladu, řešíme tedy jen $\int_1^\infty f_n(x)$.

- Bodová limita pro $x \in (1,\infty)$ je:
$$\lim_{n\to\infty}\frac{x^n}{1+x^{2n}} = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{1+x^n} = 0.$$
- Lebesgue. Zkusíme najít majorantu pomocí derivace. Zafixujme $x \in (0,\infty)$ a definujme
$$g_x(n) = \frac{x^n}{1+x^{2n}}$$
  Hledáme supremum funkce $g_x(n)$ vzhledem k n. (Pro výpočet bereme $n \in [1,\infty)$). Supremum hledáme v bodech, kde je nulová derivace, kde derivace neexistuje nebo v krajních bodech.
  Pak
$$g_x'(n) = -\frac{x^n(x^{2n}-1)\log x}{(x^{2n}+1)}$$
  Pro $n \in [1,\infty)$ není derivace nikdy nulová, navíc je vždy ostře záporná. Supremum tedy hledáme v bodě $n = 1$. Tedy zkusme $g(x) = \frac{x^1}{1+x^{2\cdot 1}}$.
  Zároveň ale platí $\int_1^\infty \frac{x}{1+x^2} = \infty$, tedy $g(x)$ není vhodnou majorantou.
  Řešení: hledejme majorantu až pro $n \ge 2$. Pak bude $\bar{g}(x) = \frac{x^2}{1+x^4}$, navíc $\int_1^\infty \frac{x^2}{1+x^4} < \infty$. Tedy jsme našli majorantu a můžeme použít Lebesgueovu větu.

- Závěr:
$$\lim_{n\to\infty}\int_0^\infty \frac{x^n}{1+x^{2n}} = \int_0^\infty 0 = 0.$$

(e) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\int_0^A \frac{e^{x^3}}{1+nx}\,\mathrm{d}x, \qquad 0<A<\infty$

Řešení:

- Bodová limita pro $x\in(0,A)$:
$$\lim_{n\to\infty}\frac{e^{x^3}}{1+nx} = 0.$$
- Lebesgue. Majoranta: $g(x)=e^{x^3}$.
Majoranta je integrovatelná, protože $g(x)$ je spojitá na $[0,A]$ (omezeném uzavřeném).
- Závěr:
$$\lim_{n\to\infty}\int_0^A \frac{e^{x^3}}{1+nx} = \int_0^A 0 = 0.$$

(f) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\int_0^\infty \frac{\ln(x+n)}{n}e^{-x}\cos x\,\mathrm{d}x$

Řešení:

- Bodová limita pro $x\in(0,\infty)$ z růstové škály:
$$\lim_{n\to\infty}\frac{\ln(x+n)}{n}e^{-x}\cos x = 0$$
- Lebesgue. Majoranta:
$$\frac{\log(x+n}{n} \le \frac{x+n}{n} \le 1+x.$$
Celkem
$$\left|\frac{\ln(x+n)}{n}e^{-x}\cos x\right| \le (1+x)\cdot 1\cdot e^{-x}.$$
Navíc víme, že $\int_0^\infty (1+x)e^{-x}<\infty$.
- Závěr:
$$\lim_{n\to\infty}\int_0^\infty \frac{\ln(x+n)}{n}e^{-x}\cos x = \int_0^\infty 0 = 0.$$

(g) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\int_0^\infty e^{-nx}\frac{\sin ax}{x}\,\mathrm{d}x \qquad a\in\mathbb{R}$

Řešení:

- Bodová limita pro $x\in(0,\infty)$:
$$\lim_{n\to\infty}e^{-nx}\frac{\sin ax}{x} = 0$$
- Lebesgue. Majoranta: Platí $|\sin t|\le t$ pro $t\in(0,\infty)$. Tedy
$$\left|e^{-nx}\frac{\sin ax}{x}\right| \le \left|e^{-nx}\frac{ax}{x}\right| \le e^{-x}|a|$$
a $\int_0^\infty e^{-x}<\infty$.

- Závěr:

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^\infty e^{-nx}\frac{\sin ax}{x} = \int_0^\infty 0 = 0.$$

(h) $\lim\limits_{n\to\infty}\int_0^\infty e^{-x^n}\,\mathrm{d}x$

Řešení:

- Bodová limita pro $x\in(0,\infty)$:

$$\lim_{n\to\infty} e^{-x^n} = \begin{cases} e^0 = 1, & x<1 \\ \text{“}e^{-\infty} = 0\text{”}, & x>1. \end{cases}$$

- Lebesgue. Majoranta:

$$g(x) = \begin{cases} 1, & x<1 \\ e^{-x}, & x>1 \end{cases}$$

- Závěr:

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^\infty e^{-x^n} = \int_0^1 1 = 1.$$

(i) $\lim\limits_{n\to\infty}\int_0^1 \frac{\sqrt{n^3}x}{1+n^2x^2}\,\mathrm{d}x$

Řešení:

- Bodová limita pro $x\in(0,1)$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n^3}x}{1+n^2x^2} = 0$$

- Lebesgue. Majoranta nalezneme pomocí derivování. Pro pevné $x\in(0,1)$ definujme $g_x(n) = \frac{\sqrt{n^3}x}{1+n^2x^2}$, $n\in[1,\infty)$. Pak

$$g_x'(n) = \frac{\frac{3}{2}\sqrt{n}(1+n^2x^2) - n\sqrt{n}2nx^2}{(1+n^2x^2)^2}$$

Nulový bod:

$$\begin{aligned} \frac{3}{2}(1+n_0^2x^2) - 2n_0^2x^2 = 0 \\ \frac{3}{2} = \frac{1}{2}n_0^2x^2 \\ \frac{3}{x^2} = n_0^2 \\ \frac{\sqrt{3}}{x} = n_0 \end{aligned}$$

Pak

$$g_x(n_0) = \frac{x\cdot 3^{3/4}}{x^{3/2}}\cdot\frac{1}{1+3} = \frac{3^{3/4}}{4\sqrt{x}}$$

Přidáme „krajní body“, tedy majoranta

$$g(x) = \max\left\{\frac{x}{1+x^2}, 0, \frac{3^{3/4}}{4\sqrt{x}}\right\}$$

Navíc jistě $\int_0^1 g(x) < \infty$.

- Závěr:

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^1 \frac{\sqrt{n^3}x}{1+n^2x^2}\int_0^1 0 = 0.$$