



11. cvičení – Posloupnost a integrál

<https://www2.karlin.mff.cuni.cz/~kuncova/vyuka.php>, kuncova@karlin.mff.cuni.cz

Teorie

Věta 1 (Levi). Nechť $\{f_n\}$ je posloupnost měřitelných funkcí na E , $\int_E f_1 d\mu > -\infty$ a $f_1 \leq f_2 \leq \dots$ Pak

$$\int_E \lim_{n \rightarrow \infty} f_n d\mu = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_E f_n d\mu.$$

Poznámka 2. Levi platí i v situaci $\int_E f_1 d\mu < \infty$ a $f_1 \geq f_2 \geq \dots$

Věta 3 (Lebesgue). Nechť f a $\{f_n\}$ jsou měřitelné funkce na E , Nechť posloupnost $\{f_n\}$ konverguje skoro všude na E . Nechť existuje funkce $g \in L^1(E)$ (majoranta) tak, že

$$|f_n(x)| \leq |g(x)|, \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad \forall x \in E.$$

Potom

$$\int_E \lim_{n \rightarrow \infty} f_n d\mu = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_E f_n d\mu.$$

Algoritmus

- Zafixujeme** $x \in (a, b)$ a spočteme $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n$.
- Jsou funkce **nezáporné** a posloupnost je **neklesající** - pro pevné x roste v n ? Levi.
- Lze najít **majorantu**? Lebesgue.
 - Lze použít nějakou **základní nerovnost**? $x \leq 1$ pro $x \in [0, 1]$, $|\sin x| \leq 1$, $|\sin x| \leq x$ pro $x \geq 0$, $\ln x \leq x - 1$, $e^{-x} < 1$ pro $x > 0$, $(a \pm b)^2 \geq 0$? Nelze zmenšit jmenovatele, vzít jen 1 člen součtu?
 - Když nevíš, tak **derivuj**: funkci $g_x(n)$, $n \in [1, \infty)$, podle n . Maximum je pak v n_0 - bodu s nulovou derivací nebo v krajních bodech (tedy $n_0 = 1$ nebo v $\lim_{n \rightarrow \infty}$).
 - Nenašla by se majoranta **alespoň** pro $n \geq 2$?
- Prohodíme** limitu a integrál.

Příklady

- Spočtěte $\lim_{n \rightarrow \infty} (a \in \mathbb{R}, A \in (0, \infty))$

(a) $\int_0^1 \frac{x^n}{n} dx$

(b) $\int_0^1 \frac{nx}{1+n^2x^2} dx$

(c) $\int_0^1 \frac{x^n}{1+x^{2n}} dx$

(d) $\int_0^\infty \frac{x^n}{1+x^{2n}} dx$

(e) $\int_0^A \frac{e^{x^3}}{1+nx} dx$

(f) $\int_0^\infty \frac{\ln(x+n)}{n} e^{-x} \cos x dx$

(g) $\int_0^\infty e^{-nx} \frac{\sin ax}{x} dx$

(h) $\int_0^\infty e^{-x^n} dx$

(i) $\int_0^1 \frac{\sqrt{n^3x}}{1+n^2x^2} dx$

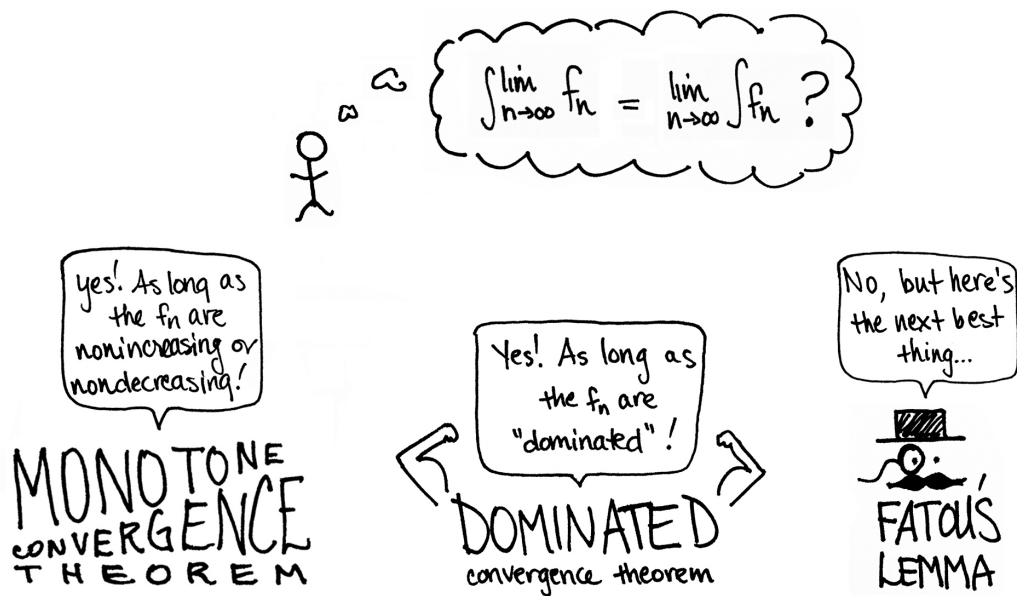


Figure 1: <https://www.math3ma.com/blog/dominated-convergence-theorem>

<ul style="list-style-type: none"> • (1I) Použijte odhad $\frac{n}{x+n} > \frac{n}{\ln(x+n)}$ a $\frac{n}{x+n} \leq (1+x)$ • (1H) Odhadněte zvlášť $(0, 1)$ a $(1, \infty)$ 	<ul style="list-style-type: none"> • (1D) Roztrhněte, volte majorantu až pro $n \geq 2$ • (1B) $g(x) = 1/2 = (x)$
--	---