10. cvičení – Lebesgue-Stieltjesův integrál

https://www2.karlin.mff.cuni.cz/~kuncova/vyuka.php, kuncova@karlin.mff.cuni.cz

Příklady

Zdroj: https://www2.karlin.mff.cuni.cz/~cuth/archiv/MFF/Kalkulus/kalkulus2_priklady.pdf

Spočítejte hodnotu Lebesgueova-Stieltjesova integrálu $\int_M f(x)\,\mathrm{d}\varphi(x)$:

1. (a) $M = [2,3],\ f(x) = x^2, \varphi(x) = \chi_{[2,\infty)}(x)$

   Řešení:

$$\begin{aligned}
\int_M f(x)\,\mathrm{d}\varphi(x) &= \int_{\{2\}} f(x)\,\mathrm{d}\varphi(x) + \int_{(2,3)} f(x)\,\mathrm{d}\varphi(x) + \int_{\{3\}} f(x)\,\mathrm{d}\varphi(x) \\
&= f(2)(\lim_{x\to 2+} \chi_{[2,\infty)} - \lim_{x\to 2-} \chi_{[2,\infty)}) + \int_2^3 x^2 \cdot 0\,\mathrm{d}x \\
&\quad + f(3)(\lim_{x\to 3+} \chi_{[2,\infty)} - \lim_{x\to 3-} \chi_{[2,\infty)}) \\
&= 4(1-0) + 0 + 9(1-1) \\
&= 4.
\end{aligned}$$

   (b) $M = [0,\infty),\ f(x) = e^x,\ \varphi(x) = (3 - e^{-2x})\chi_{[0,\infty)}(x)$

   Řešení:

$$\begin{aligned}
\int_M f(x)\,\mathrm{d}\varphi(x) &= \int_{\{0\}} f(x)\,\mathrm{d}\varphi(x) + \int_{(0,\infty)} f(x)\,\mathrm{d}\varphi(x) \\
&= f(0)(\lim_{x\to 0+} (3 - e^{-2x})\chi_{[0,\infty)} - (3 - e^{-2x}) \lim_{x\to 0-} \chi_{[0,\infty)}) + \int_0^\infty e^x (3 - e^{-2x})'\,\mathrm{d}x \\
&= 1((3-1)1 - (3-1)0) + \int_0^\infty e^x(0 + 2e^{-2x}) \\
&= 2 + \int_0^\infty 2e^{-x}\,\mathrm{d}x = 2 + 2[-e^{-x}]_0^\infty = 2 + 2(0+1) \\
&= 4
\end{aligned}$$

   (c) $M = [1,3],\ f(x) = \begin{cases} x & x \neq 2 \\ 1 & x = 2 \end{cases},\ \varphi(x) = \begin{cases} x & x < 0 \\ x+1 & x \geq 0 \end{cases}$

Řešení:

$$\begin{aligned}\int_M f(x)\,\mathrm{d}\varphi(x) &= \int_{\{1\}} f(x)\,\mathrm{d}\varphi(x) + \int_{(1,2)} f(x)\,\mathrm{d}\varphi(x) + \int_{\{2\}} f(x)\,\mathrm{d}\varphi(x)\\ &\quad + \int_{(2,3)} f(x)\,\mathrm{d}\varphi(x) + \int_{\{3\}} f(x)\,\mathrm{d}\varphi(x)\\ &= f(1)(\lim_{x\to 1+}(x+1) - \lim_{x\to 1-}(x+1)) + \int_1^2 x\cdot 1\,\mathrm{d}x\\ &+ f(2)(\lim_{x\to 2+}(x+1) - \lim_{x\to 2-}(x+1)) + \int_2^3 x\cdot 1\,\mathrm{d}x\\ &+ f(3)(\lim_{x\to 3+}(x+1) - \lim_{x\to 3-}(x+1))\\ &= 1(2-2) + \left[\frac{x^2}{2}\right]_1^2 + 1(3-3) + \left[\frac{x^2}{2}\right]_2^3 + 3(4-4)\\ &= \frac{3}{2} + \frac{5}{2} = 4.\end{aligned}$$

(d) $M = [-1,1],\ f(x) = \begin{cases} x & x \neq 0\\ 1 & x = 0\end{cases},\ \varphi(x) = \begin{cases} x & x < 0\\ x+1 & x \geq 0\end{cases}$

Řešení:

$$\begin{aligned}\int_M f(x)\,\mathrm{d}\varphi(x) &= \int_{\{-1\}} f(x)\,\mathrm{d}\varphi(x) + \int_{(-1,0)} f(x)\,\mathrm{d}\varphi(x) + \int_{\{0\}} f(x)\,\mathrm{d}\varphi(x)\\ &\quad + \int_{(0,1)} f(x)\,\mathrm{d}\varphi(x) + \int_{\{1\}} f(x)\,\mathrm{d}\varphi(x)\\ &= f(-1)(\lim_{x\to -1+} x - \lim_{x\to -1-} x) + \int_{-1}^0 x\cdot 1\,\mathrm{d}x\\ &+ f(0)(\lim_{x\to 0+}(x+1) - \lim_{x\to 0-}(x)) + \int_0^1 x\cdot 1\,\mathrm{d}x\\ &+ f(1)(\lim_{x\to 1+}(x+1) - \lim_{x\to 1-}(x+1))\\ &= -1(-1+1) + \left[\frac{x^2}{2}\right]_{-1}^0 + 1(1-0) + \left[\frac{x^2}{2}\right]_0^1 + 1(2-2)\\ &= \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1\end{aligned}$$

(e) $M = [0,3),\ f(x) = x^2,\ \varphi(x) = \begin{cases} 0 & x < 1\\ x^2 - 2x + 2 & x \in [1,2)\\ 3 & x = 2\\ x+2 & x > 2\end{cases}$

Řešení:

$$\begin{aligned}
\int_M f(x)\,\mathrm{d}\varphi(x) &= \int_{\{0\}} f(x)\,\mathrm{d}\varphi(x) + \int_{(0,1)} f(x)\,\mathrm{d}\varphi(x) + \int_{\{1\}} f(x)\,\mathrm{d}\varphi(x) \\
&\quad + \int_{(1,2)} f(x)\,\mathrm{d}\varphi(x) + \int_{\{2\}} f(x)\,\mathrm{d}\varphi(x) + \int_{(2,3)} f(x)\,\mathrm{d}\varphi(x) \\
&= f(0)(\lim_{x\to 0+} 0 - \lim_{x\to 0-} 0) + \int_0^1 x^2\cdot 0\,\mathrm{d}x + f(1)(\lim_{x\to 1+} x^2-2x+2 - \lim_{x\to 1-} 0) \\
&+ \int_1^2 x^2\cdot(2x-2)\,\mathrm{d}x + f(2)(\lim_{x\to 2+} x+2 - \lim_{x\to 2-} x^2-2x+2) + \int_2^3 x^2\cdot 1\,\mathrm{d}x \\
&= 0+0+1(1-0) + \left[\frac{x^4}{2} - \frac{2x^3}{3}\right]_1^2 + 4(4-2) + \left[\frac{x^3}{3}\right]_2^3 \\
&= 1 + \frac{8}{3} + \frac{1}{6} + 8 + 9 - \frac{8}{3} \\
&= \frac{109}{6}
\end{aligned}$$

(f) $M=[0,5]$, $f(x)=x^2+1$, $\varphi(x)=[x]$ (celá část)

Řešení:

$$\begin{aligned}
\int_M f(x)\,\mathrm{d}\varphi(x) &= \int_{\{0\}} f(x)\,\mathrm{d}\varphi(x) + \int_{(0,1)} f(x)\,\mathrm{d}\varphi(x) + \int_{\{1\}} f(x)\,\mathrm{d}\varphi(x) + \int_{(1,2)} f(x)\,\mathrm{d}\varphi(x) \\
&\quad + \int_{\{2\}} f(x)\,\mathrm{d}\varphi(x) + \int_{(2,3)} f(x)\,\mathrm{d}\varphi(x) + \int_{\{3\}} f(x)\,\mathrm{d}\varphi(x) + \int_{(3,4)} f(x)\,\mathrm{d}\varphi(x) \\
&\quad + \int_{\{4\}} f(x)\,\mathrm{d}\varphi(x) + \int_{(4,5)} f(x)\,\mathrm{d}\varphi(x) + \int_{\{5\}} f(x)\,\mathrm{d}\varphi(x) \\
&= f(0)(\lim_{x\to 0+}[x] - \lim_{x\to 0-}[x]) + \int_0^1 (x^2+1)\cdot 0\,\mathrm{d}x \\
&+ f(1)(\lim_{x\to 1+}[x] - \lim_{x\to 1-}[x]) + \int_1^2 (x^2+1)\cdot 0\,\mathrm{d}x \\
&+ f(2)(\lim_{x\to 2+}[x] - \lim_{x\to 2-}[x]) + \int_2^3 (x^2+1)\cdot 0\,\mathrm{d}x \\
&+ f(3)(\lim_{x\to 3+}[x] - \lim_{x\to 3-}[x]) + \int_3^4 (x^2+1)\cdot 0\,\mathrm{d}x \\
&+ f(4)(\lim_{x\to 4+}[x] - \lim_{x\to 4-}[x]) + \int_4^5 (x^2+1)\cdot 0\,\mathrm{d}x \\
&+ f(5)(\lim_{x\to 5+}[x] - \lim_{x\to 5-}[x]) \\
&= 1\cdot 1 + 2\cdot 1 + 5\cdot 1 + 10\cdot 1 + 17\cdot 1 + 26\cdot 1 \\
&= 4.
\end{aligned}$$

(g) $M=[0,5]$, $f(x)=e^x$, $\varphi(x)=x+[x]$

Řešení:

$$\begin{aligned}\int_M f(x)\,\mathrm{d}\varphi(x) = &\int_{\{0\}} f(x)\,\mathrm{d}\varphi(x) + \int_{(0,1)} f(x)\,\mathrm{d}\varphi(x) + \int_{\{1\}} f(x)\,\mathrm{d}\varphi(x) + \int_{(1,2)} f(x)\,\mathrm{d}\varphi(x)\\ &+ \int_{\{2\}} f(x)\,\mathrm{d}\varphi(x) + \int_{(2,3)} f(x)\,\mathrm{d}\varphi(x) + \int_{\{3\}} f(x)\,\mathrm{d}\varphi(x) + \int_{(3,4)} f(x)\,\mathrm{d}\varphi(x)\\ &+ \int_{\{4\}} f(x)\,\mathrm{d}\varphi(x) + \int_{(4,5)} f(x)\,\mathrm{d}\varphi(x) + \int_{\{5\}} f(x)\,\mathrm{d}\varphi(x)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&= f(0)(\lim_{x\to 0+} x + [x] - \lim_{x\to 0-} x + [x]) + \int_0^1 e^x \cdot 1\,\mathrm{d}x\\ &+ f(1)(\lim_{x\to 1+} x + [x] - \lim_{x\to 1-} x + [x]) + \int_1^2 e^x \cdot 1\,\mathrm{d}x\\ &+ f(2)(\lim_{x\to 2+} x + [x] - \lim_{x\to 2-} x + [x]) + \int_2^3 e^x \cdot 1\,\mathrm{d}x\\ &+ f(3)(\lim_{x\to 3+} x + [x] - \lim_{x\to 3-} x + [x]) + \int_3^4 e^x \cdot 1\,\mathrm{d}x\\ &+ f(4)(\lim_{x\to 4+} x + [x] - \lim_{x\to 4-} x + [x]) + \int_4^5 e^x \cdot 1\,\mathrm{d}x\\ &+ f(5)(\lim_{x\to 5+} x + [x] - \lim_{x\to 5-} x + [x])\\ &= e^0 \cdot 1 + e^x \cdot 1 + e^2 \cdot 1 + e^3 \cdot 1 + e^4 \cdot 1 + e^5 \cdot 1 + [e^x]_0^5\\ &= e^x + e^2 + e^3 + e^4 + 2e^5\end{aligned}$$

Zkouškové příklady

Zdroj: https://www2.karlin.mff.cuni.cz/~cuth/archiv/MFF/Kalkulus/kalkulus2_zkPis.pdf

2. (a) Spočítejte následující Lebesgueův-Stieltjesův integrál ($[\cdot]$ značí celou část)

$$\int_{[1,5]} [x]x\,\mathrm{d}\varphi(x), \qquad \text{kde } \varphi(x) = \begin{cases} 3x^2 + 4x - 2, & x \in [1,2)\\ 1, & x = 2\\ x - 2, & x \in (2,3]\\ -2x & x \in (3,5]. \end{cases}$$

Řešení:

$$\begin{aligned}\int_M f(x)\,\mathrm{d}\varphi(x) &= \int_{\{1\}} f(x)\,\mathrm{d}\varphi(x) + \int_{(1,2)} f(x)\,\mathrm{d}\varphi(x) + \int_{\{2\}} f(x)\,\mathrm{d}\varphi(x) + \int_{(2,3)} f(x)\,\mathrm{d}\varphi(x)\\ &\quad + \int_{\{3\}} f(x)\,\mathrm{d}\varphi(x) + \int_{(3,4)} f(x)\,\mathrm{d}\varphi(x)\\ &\quad + \int_{\{4\}} f(x)\,\mathrm{d}\varphi(x) + \int_{(4,5)} f(x)\,\mathrm{d}\varphi(x) + \int_{\{5\}} f(x)\,\mathrm{d}\varphi(x)\\ &= f(1)(\lim_{x\to 1+} 3x^2+4x-2 - \lim_{x\to 1-} 3x^2+4x-2) + \int_1^2 x[x]\cdot(6x+4)\,\mathrm{d}x\\ &+ f(2)(\lim_{x\to 2+} x-2 - \lim_{x\to 2-} 3x^2+4x-2) + \int_2^3 x[x]\cdot 1\,\mathrm{d}x\\ &+ f(3)(\lim_{x\to 3+} -2x - \lim_{x\to 3-} x-2) + \int_3^4 x[x]\cdot(-2)\,\mathrm{d}x\\ &+ f(4)(\lim_{x\to 4+} -2x - \lim_{x\to 4-} -2x) + \int_4^5 x[x]\cdot(-2)\,\mathrm{d}x\\ &+ f(5)(\lim_{x\to 5+} -2x - \lim_{x\to 5-} -2x)\\ &= 1(5-5) + \int_1^2 x(6x+4)\,\mathrm{d}x + 4(0-18) + \int_2^3 2x\,\mathrm{d}x + 9(-6-1)\\ &\quad + \int_3^4 3x(-2)\,\mathrm{d}x + 16\cdot 0 + \int_4^5 4x(-2)\,\mathrm{d}x + 25\cdot 0\\ &= 20-72+5-63-21-36 = -167\end{aligned}$$

(b) Spočítejte následující Lebesgueův-Stieltjesův integrál ($[\cdot]$ značí celou část)

$$\int_{[-2,2]} f(x)\,\mathrm{d}([2x]-2x), \qquad \text{kde } f(x) = \begin{cases} x+2, & x\in[-2,-1]\\ 1, & x\in(-1,0)\\ 100, & x=0\\ -x^2+7, & x\in(0,2].\end{cases}$$

Řešení:

$$
\begin{aligned}
\int_M f(x)\,\mathrm{d}\varphi(x) &= \int_{\{-2\}} f(x)\,\mathrm{d}\varphi(x) + \int_{(-2,-\frac{3}{2})} f(x)\,\mathrm{d}\varphi(x) + \int_{\{-\frac{3}{2}\}} f(x)\,\mathrm{d}\varphi(x) \\
&\quad + \int_{(-\frac{3}{2},-1)} f(x)\,\mathrm{d}\varphi(x) + \int_{\{-1\}} f(x)\,\mathrm{d}\varphi(x) + \int_{(-1,-\frac{1}{2})} f(x)\,\mathrm{d}\varphi(x) \\
&\quad + \int_{\{0\}} f(x)\,\mathrm{d}\varphi(x) + \int_{(0,\frac{1}{2})} f(x)\,\mathrm{d}\varphi(x) + \int_{\{\frac{1}{2}\}} f(x)\,\mathrm{d}\varphi(x) \\
&\quad + \int_{(\frac{1}{2},1)} f(x)\,\mathrm{d}\varphi(x) + \int_{\{1\}} f(x)\,\mathrm{d}\varphi(x) + \int_{(1,\frac{3}{2})} f(x)\,\mathrm{d}\varphi(x) \\
&\quad + \int_{\{\frac{3}{2}\}} f(x)\,\mathrm{d}\varphi(x) + \int_{(\frac{3}{2},2)} f(x)\,\mathrm{d}\varphi(x) + \int_{\{2\}} f(x)\,\mathrm{d}\varphi(x) \\
&= f(-2)(\lim_{x\to -2+}[2x]-2x - \lim_{x\to -2-}[2x]-2x) + \int_{-2}^{-\frac{3}{2}} (x+2)\cdot(-2)\,\mathrm{d}x \\
&\quad + f(-\frac{3}{2})(\lim_{x\to -\frac{3}{2}+}[2x]-2x - \lim_{x\to -\frac{3}{2}-}[2x]-2x) + \int_{-\frac{3}{2}}^{-1} (x+2)\cdot(-2)\,\mathrm{d}x \\
&\quad + f(-1)(\lim_{x\to -1+}[2x]-2x - \lim_{x\to -1-}[2x]-2x) + \int_{-1}^{-\frac{1}{2}} 1\cdot(-2)\,\mathrm{d}x \\
&\quad + f(-\frac{1}{2})(\lim_{x\to -\frac{1}{2}+}[2x]-2x - \lim_{x\to -\frac{1}{2}-}[2x]-2x) + \int_{-\frac{1}{2}}^{0} 1\cdot(-2)\,\mathrm{d}x \\
&\quad + f(0)(\lim_{x\to 0+}[2x]-2x - \lim_{x\to 0-}[2x]-2x) + \int_{0}^{\frac{1}{2}} (-x^2+7)\cdot(-2)\,\mathrm{d}x \\
&\quad + f(\frac{1}{2})(\lim_{x\to \frac{1}{2}+}[2x]-2x - \lim_{x\to \frac{1}{2}-}[2x]-2x) + \int_{\frac{1}{2}}^{1} (-x^2+7)\cdot(-2)\,\mathrm{d}x \\
&\quad + f(1)(\lim_{x\to 1+}[2x]-2x - \lim_{x\to 1-}[2x]-2x) + \int_{1}^{\frac{3}{2}} (-x^2+7)\cdot(-2)\,\mathrm{d}x \\
&\quad + f(\frac{3}{2})(\lim_{x\to \frac{3}{2}+}[2x]-2x - \lim_{x\to \frac{3}{2}-}[2x]-2x) + \int_{\frac{3}{2}}^{2} (-x^2+7)\cdot(-2)\,\mathrm{d}x \\
&= 0\cdot 1 + \frac{1}{2}\cdot 1 + 1\cdot 1 + 1\cdot 1 + 100\cdot 1 + \frac{27}{4}\cdot 1 + 6\cdot 1 + \frac{19}{4}\cdot 1 + 3\cdot 1 \\
&\quad + [-x^2-4x]_{-2}^{-1} + [-2x]_{-1}^{0} + \left[\frac{2x^3}{3} - 14x\right]_{-2}^{0} \\
&= 123 - 1 - 2 - \frac{68}{3} \\
&= \frac{292}{3}
\end{aligned}
$$