10. cvičení – Lebesgue-Stieltjesův integrál

https://www2.karlin.mff.cuni.cz/~kuncova/vyuka.php, kuncova@karlin.mff.cuni.cz

Teorie

Věta 1. Nechť $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ je rozdílem omezených neklesajících funkcí a nechť $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ je omezená borelovsky měřitelná funkce. Pak

1. Je-li interval I disjunktním sjednocením intervalů $\{I_j\}_{j=1}^n$, pak
$$\int_I f(x)\,\mathrm{d}\varphi(x) = \sum_{j=1}^n \int_{I_j} f(x)\,\mathrm{d}\varphi(x).$$
2. Pro každé $c \in \mathbb{R}$ platí
$$\int_{\{c\}} f(x)\,\mathrm{d}\varphi(x) = f(c)(\varphi(c+) - \varphi(c-)).$$
3. Je-li $I \subseteq \mathbb{R}$ otevřený interval, $f \in C(I)$, $\varphi \in C^1(I)$, pak
$$\int_I f(x)\,\mathrm{d}\varphi(x) = \int_I f(x)\varphi'(x)\,\mathrm{d}x.$$

Algoritmus

1. Načrtneme graf f a φ.
2. Načrtneme množinu M, najdeme body, kde se předpisy funkcí „lámou".
3. Rozsekáme integrál na intervaly zintegrujeme dle Věty.

Příklady

Zdroj: https://www2.karlin.mff.cuni.cz/~cuth/archiv/MFF/Kalkulus/kalkulus2_priklady.pdf

Spočítejte hodnotu Lebesgueova-Stieltjesova integrálu $\int_M f(x)\,\mathrm{d}\varphi(x)$:

1. (a) $M = [2,3],\ f(x) = x^2, \varphi(x) = \chi_{[2,\infty)}(x)$
   (b) $M = [0,\infty),\ f(x) = e^x,\ \varphi(x) = (3 - e^{-2x})\chi_{[0,\infty)}(x)$
   (c) $M = [1,3],\ f(x) = \begin{cases} x & x \neq 2 \\ 1 & x = 2 \end{cases},\ \varphi(x) = \begin{cases} x & x < 0 \\ x+1 & x \geq 0 \end{cases}$
   (d) $M = [-1,1],\ f(x) = \begin{cases} x & x \neq 0 \\ 1 & x = 0 \end{cases},\ \varphi(x) = \begin{cases} x & x < 0 \\ x+1 & x \geq 0 \end{cases}$
   (e) $M = [0,3),\ f(x) = x^2,\ \varphi(x) = \begin{cases} 0 & x < 1 \\ x^2 - 2x + 2 & x \in [1,2) \\ 3 & x = 2 \\ x+2 & x > 2 \end{cases}$
   (f) $M = [0,5],\ f(x) = x^2 + 1,\ \varphi(x) = [x]$ (celá část)
   (g) $M = [0,5],\ f(x) = e^x,\ \varphi(x) = x + [x]$

Zkouškové příklady

Zdroj: https://www2.karlin.mff.cuni.cz/~cuth/archiv/MFF/Kalkulus/kalkulus2_zkPis.pdf

2. (a) Spočítejte následující Lebesgueův-Stieltjesův integrál ($[\cdot]$ značí celou část)

$$\int_{[1,5]} [x]x \,\mathrm{d}\varphi(x), \qquad \text{kde } \varphi(x) = \begin{cases} 3x^2+4x-2, & x\in[1,2) \\ 1, & x=2 \\ x-2, & x\in(2,3] \\ -2x & x\in(3,5]. \end{cases}$$

   (b) Spočítejte následující Lebesgueův-Stieltjesův integrál ($[\cdot]$ značí celou část)

$$\int_{[-2,2]} f(x) \,\mathrm{d}([2x]-2x), \qquad \text{kde } f(x) = \begin{cases} x+2, & x\in[-2,-1] \\ 1, & x\in(-1,0) \\ 100, & x=0 \\ -x^2+7, & x\in(0,2]. \end{cases}$$

(1c) substituce $y=\sqrt{x}$
(1d) $a^b = e^{b\ln a}$
(1f) začněte s bodem 0
(1g) Taylorův rozvoj
(1m) upravte odmocniny

(2e) uvažujte kombinace záporných i kladných p i q. Pro představu položte např. $p=\pm 3$ a $q=\pm 2$
(2f) substituce $y=\sqrt{x}$
(2g) $\operatorname{arccot} x = \frac{\pi}{2} - \arctan x$