



9. cvičení – 3D integrál

<https://www2.karlin.mff.cuni.cz/~kuncova/vyuka.php>, kuncova@karlin.mff.cuni.cz

Příklady

Zdroje příkladů a řešení:

http://mat.fsv.cvut.cz/Sibrava/Vyuka/vic_int.pdf

https://math.fme.vutbr.cz/download.aspx?id_file=602492416

<https://fix.prof.jcu.cz/~eisner/lock/UMB-566-materialy/matematika-sbirka-II>

[I-Krivkovy_integral.pdf](#)

<https://homel.vsb.cz/~bou10/archiv/ip2.pdf>

<https://is.muni.cz/el/1433/jaro2009/MB102/7448541/skripta4.pdf>

<https://math.fel.cvut.cz/en/people/habala/teaching/veci-ma2/ma2r4.pdf>

<http://www.matematika-lucerna.cz/matalyza/resene-matika3.pdf>

1. Spočítejte objem tělesa, kde $M := \{[x, y, z] \in \mathbb{R}^3; 0 \leq y \leq 1; 0 \leq x \leq \arctan y; 0 \leq z \leq \frac{6x}{1+y^2}\}$

Řešení: Počítáme objem, integrujeme tedy funkci $f(x, y, z) = 1$. Z Fubiniho věty pak máme

$$\begin{aligned} \int_0^1 \int_0^{\arctan y} \int_0^{\frac{6x}{1+y^2}} 1 \, dz \, dx \, dy &= \int_0^1 \int_0^{\arctan y} \frac{6x}{1+y^2} \, dx \, dy = \int_0^1 \frac{3 \arctan^2 y}{1+y^2} \, dy \\ &= [\arctan^3 y]_0^1 = \left(\frac{\pi}{4}\right)^3 \end{aligned}$$

2. Za pomoci substitucí spočítejte integrály

(a) $\int_M x^2 + y^2 \, d\lambda$, kde $M := \{[x, y, z] \in \mathbb{R}^3; 1 \leq z \leq 2; x^2 + y^2 \leq 1\}$

Řešení: Válcové souřadnice.

$$x(r, \alpha, z) := r \cos \alpha$$

$$y(r, \alpha, z) := r \sin \alpha,$$

$$z(r, \alpha, z) := z$$

Navíc $z \in (1, 2)$, $r \in (0, 1)$, $\alpha \in (-\pi, \pi)$.

Fubinka a věta o substituci.

$$\begin{aligned} \int_0^1 \int_{-\pi}^{\pi} \int_1^2 (r^2 \cos^2 \alpha + r^2 \sin^2 \alpha) r \, dz \, d\alpha \, dr &= \int_0^1 \int_{-\pi}^{\pi} \int_1^2 r^3 \, dz \, d\alpha \, dr \\ &= \int_0^1 \int_{-\pi}^{\pi} 1 r^3 \, d\alpha \, dr = \int_0^1 2\pi r^3 \, dr \\ &= \left[\frac{2\pi r^4}{4} \right]_0^1 = \frac{\pi}{2} \end{aligned}$$

- (b) Spočítejte objem množiny M , kde $M := \{[x, y, z] \in \mathbb{R}^3; -1 < x < 1, z > 0, y^2 + z^2 \leq 1\}$

Řešení: Proházené válcové souřadnice.

$$\begin{aligned}x(r, \alpha, z) &:= x \\y(r, \alpha, z) &:= r \cos \alpha \\z(r, \alpha, z) &:= r \sin \alpha,\end{aligned}$$

Navíc $x \in (-1, 1)$, $r \in (0, 1)$, $\alpha \in (0, \pi)$.

Fubinka a věta o substituci.

$$\begin{aligned}\int_0^1 \int_0^\pi \int_{-1}^1 r \, dz \, d\alpha \, dr &= \int_0^1 \int_{-\pi}^\pi 2r \, d\alpha \, dr = \int_0^1 2\pi r \, dr \\&= \left[\frac{2\pi r^2}{2} \right]_0^1 = \pi\end{aligned}$$

- (c) $\int_M 1 \, d\lambda$, kde $M := \{[x, y, z] \in \mathbb{R}^3; x^2 + y^2 + z^2 \leq 1\}$

Řešení: Sférické souřadnice.

$$\begin{aligned}x(r, \beta, \gamma) &:= r \cos \gamma \cos \beta, \\y(r, \beta, \gamma) &:= r \cos \gamma \sin \beta, \\z(r, \beta, \gamma) &:= r \sin \gamma\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}1 &> r > 0, \\-\pi &< \beta < \pi, \\-\frac{\pi}{2} &< \gamma < \frac{\pi}{2},\end{aligned}$$

Fubinka a věta o substituci:

$$\begin{aligned}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \int_{-\pi}^\pi \int_0^1 r^2 \cos \gamma \, dr \, d\beta \, d\gamma &= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \int_{-\pi}^\pi \cos \gamma \left[\frac{r^3}{3} \right]_0^1 \, d\beta \, d\gamma = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{3} \cdot \cos \gamma \cdot 2\pi \, d\gamma \\&= \frac{2\pi}{3} [\sin \gamma]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} = \frac{4\pi}{3}\end{aligned}$$

- (d) $\int_M \frac{1}{(x^2 + y^2 + z^2)^3} \, d\lambda$, kde $M = \{[x, y, z] \in \mathbb{R}^3; 1 \leq x^2 + y^2 + z^2 \leq 4, z \leq 0\}$

Řešení: Sférické souřadnice.

$$\begin{aligned}x(r, \beta, \gamma) &:= r \cos \gamma \cos \beta, \\y(r, \beta, \gamma) &:= r \cos \gamma \sin \beta, \\z(r, \beta, \gamma) &:= r \sin \gamma\end{aligned}$$

kde $r \in (1, 2)$, $\beta \in (-\pi, \pi)$, $\gamma \in (-\frac{\pi}{2}, 0)$.

Fubinka a věta o substituci:

$$\begin{aligned}
 \int_{-\frac{\pi}{2}}^0 \int_{-\pi}^{\pi} \int_1^2 \frac{1}{(r^2)^3} r^2 \cos \gamma \, dr \, d\beta \, d\gamma &= \int_{-\frac{\pi}{2}}^0 \int_{-\pi}^{\pi} \int_1^2 r^{-4} \cos \gamma \, dr \, d\beta \, d\gamma \\
 &= \int_{-\frac{\pi}{2}}^0 \int_{-\pi}^{\pi} \cos \gamma \left[\frac{r^{-3}}{-3} \right]_1^2 \, d\beta \, d\gamma \\
 &= \int_{-\frac{\pi}{2}}^0 \int_{-\pi}^{\pi} \frac{7}{24} \cos \gamma \, d\beta \, d\gamma \\
 &= \int_{-\frac{\pi}{2}}^0 \frac{7 \cdot 2\pi}{24} \cos \gamma \, d\gamma \\
 &= \frac{7\pi}{12} [\sin \gamma]_{-\frac{\pi}{2}}^0 = \frac{7\pi}{12}
 \end{aligned}$$

(e) $\int_M \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \, d\lambda$, kde $M = \{[x, y, z] \in \mathbb{R}^3; x, y, z \geq 0; x^2 + y^2 + z^2 \leq 1\}$

Řešení: Sférické souřadnice.

$$\begin{aligned}
 x(r, \beta, \gamma) &:= r \cos \gamma \cos \beta, \\
 y(r, \beta, \gamma) &:= r \cos \gamma \sin \beta, \\
 z(r, \beta, \gamma) &:= r \sin \gamma
 \end{aligned}$$

kde $r \in (0, 1)$, $\beta \in (0, \frac{\pi}{2})$, $\gamma \in (0, \frac{\pi}{2})$.

Fubinka a věta o substituci:

$$\begin{aligned}
 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^1 \sqrt{r^2} r^2 \cos \gamma \, dr \, d\beta \, d\gamma &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^1 r^3 \cos \gamma \, dr \, d\beta \, d\gamma \\
 &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos \gamma \left[\frac{r^4}{4} \right]_0^1 \, d\beta \, d\gamma \\
 &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{4} \cos \gamma \, d\beta \, d\gamma \\
 &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\pi}{8} \cos \gamma \, d\gamma \\
 &= \frac{\pi}{8} [\sin \gamma]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{8}
 \end{aligned}$$

(f) Spočítejte objem tělesa, $M = \{[x, y, z] \in \mathbb{R}^3; x^2 + 4y^2 + z^2 \leq 4\}$

Řešení: Zobecněné sférické souřadnice.

$$\begin{aligned}
 x(r, \beta, \gamma) &:= r \cos \gamma \cos \beta, \\
 y(r, \beta, \gamma) &:= \frac{1}{2} r \cos \gamma \sin \beta, \\
 z(r, \beta, \gamma) &:= r \sin \gamma
 \end{aligned}$$

kde $r \in (0, 2)$, $\beta \in (-\pi, \pi)$, $\gamma \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$.

Fubinka a věta o substituci (pozor na Jakobián):

$$\begin{aligned} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \int_{-\pi}^{\pi} \int_0^2 \frac{1}{2} r^2 \cos \gamma \, dr \, d\beta \, d\gamma &= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \int_{-\pi}^{\pi} \cos \gamma \left[\frac{r^3}{6} \right]_0^2 d\beta \, d\gamma = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{8}{6} \cos \gamma \, d\beta \, d\gamma \\ &= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{8\pi}{3} \cos \gamma \, d\gamma = \frac{8\pi}{3} [\sin \gamma]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} = \frac{16}{3}\pi \end{aligned}$$

(g) $\int_M z \, d\lambda$, kde $M = \{[x, y, z] \in \mathbb{R}^3; x^2 + y^2 \leq z^2 \leq 1, z \geq 0\}$

Řešení: Jde o kužel. Válcové souřadnice.

$$\begin{aligned} x(r, \alpha, z) &:= r \cos \alpha \\ y(r, \alpha, z) &:= r \sin \alpha, \\ z(r, \alpha, z) &:= z \end{aligned}$$

Po dosazení do rovnic dostáváme

$$r^2 \leq z^2 \leq 1$$

Tedy $z \in (0, 1)$, $r \in (0, z)$, $\alpha \in (-\pi, \pi)$.

Fubinka a věta o substituci.

$$\begin{aligned} \int_0^1 \int_{-\pi}^{\pi} \int_0^z z r \, dr \, d\alpha \, dz &= \int_0^1 \int_{-\pi}^{\pi} z \left[\frac{r^2}{2} \right]_0^z d\alpha \, dz = \int_0^1 \int_{-\pi}^{\pi} \frac{z^3}{2} d\alpha \, dz = \int_0^1 \pi z^3 \, dz \\ &= \pi \left[\frac{z^4}{4} \right]_0^1 = \frac{\pi}{4} \end{aligned}$$

(h) $\int_M \sqrt{x^2 + y^2} \, d\lambda$, kde $M = \{[x, y, z] \in \mathbb{R}^3; x^2 + y^2 \leq z \leq 1\}$

Řešení: Parabolický kužel. Válcové souřadnice.

$$\begin{aligned} x(r, \alpha, z) &:= r \cos \alpha \\ y(r, \alpha, z) &:= r \sin \alpha, \\ z(r, \alpha, z) &:= z \end{aligned}$$

Po dosazení do rovnic dostáváme

$$0 \leq r^2 \leq z \leq 1$$

Tedy $z \in (0, 1)$, $r \in (0, \sqrt{z})$, $\alpha \in (-\pi, \pi)$.

Fubinka a věta o substituci.

$$\begin{aligned} \int_0^1 \int_{-\pi}^{\pi} \int_0^{\sqrt{z}} r \cdot r \, dr \, d\alpha \, dz &= \int_0^1 \int_{-\pi}^{\pi} \left[\frac{r^3}{3} \right]_0^{\sqrt{z}} d\alpha \, dz = \int_0^1 \int_{-\pi}^{\pi} \frac{z^{\frac{3}{2}}}{3} d\alpha \, dz \\ &= \int_0^1 2\pi \frac{z^{\frac{3}{2}}}{3} dz = \frac{2\pi}{3} \left[\frac{2z^{\frac{5}{2}}}{5} \right]_0^1 = \frac{4\pi}{15} \end{aligned}$$

(i) $\int_M z dA$, kde $M = \{[x, y, z] \in \mathbb{R}^3; 0 \leq z \leq 4 - 2\sqrt{x^2 + y^2}\}$

Řešení: Otočený kužel. Válcové souřadnice.

$$x(r, \alpha, z) := r \cos \alpha$$

$$y(r, \alpha, z) := r \sin \alpha,$$

$$z(r, \alpha, z) := z$$

Po dosazení do rovnic dostáváme

$$0 \leq z \leq 4 - 2\sqrt{r^2} = 4 - 2r$$

Tedy $z \in (0, 4 - 2r)$, $r \in (0, 2)$, $\alpha \in (-\pi, \pi)$.

Fubinka a věta o substituci.

$$\begin{aligned} \int_{-\pi}^{\pi} \int_0^2 \int_0^{4-2r} r \cdot z \, dz \, dr \, d\alpha &= \int_{-\pi}^{\pi} \int_0^2 r \left[\frac{z^2}{2} \right]_0^{4-2r} dr \, d\alpha \\ &= \int_{-\pi}^{\pi} \int_0^2 \frac{1}{2} r (4 - 2r)^2 dr \, d\alpha \\ &= \int_{-\pi}^{\pi} \int_0^2 (2r^3 - 8r^2 + 8r) dr \, d\alpha \\ &= \int_{-\pi}^{\pi} \left[\frac{r^4}{2} - \frac{8r^3}{3} + 4r^2 \right]_0^2 d\alpha \\ &= \int_{-\pi}^{\pi} \frac{8}{3} d\alpha = \frac{16\pi}{3} \end{aligned}$$

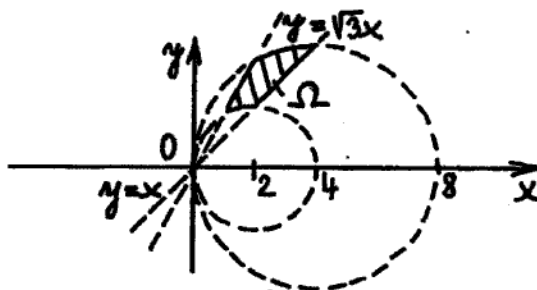
Bonus

3. Muffin: Spočítejte objem tělesa T určeného vztahy $x^2 + y^2 \leq z^2$, $1 \leq x^2 + y^2 + z^2 \leq 4$, $z \geq 0$.
4. Kornout se zmrzlinou: Spočítejte objem tělesa T určeného vztahy $x^2 + y^2 \leq z^2 \leq 6 - (x^2 + y^2)$, $z \geq 0$.
5. Určete hmotnost krychle o straně $2a$. Hustota krychle je přímo úměrná čtverci vzdálenosti od průsečíku tělesových úhlopříček a ve vrcholech je rovna 1.
6. Určete hmotnost koule o poloměru a . Hustota koule je přímo úměrná vzdálenosti od středu koule a na povrchu je rovna 1.
7. $\int_M \frac{x+y}{z+4} d\lambda$, kde M je ohraničená plochami $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$, $z = 4$ a $x + y = 3$.

13 Aplikace vícerozměrných integrálů

121. Příklad Spočítejte obsah rovinného obrazce M ohraničeného přímkami $y = x$, $y = \sqrt{3}x$ a křivkami $x^2 + y^2 = 4x$, $x^2 + y^2 = 8x$.

Řešení Nejprve provedeme úpravu rovnice $x^2 + y^2 = 4x$ na tvar $(x-2)^2 + y^2 = 4$. Podobně $x^2 + y^2 = 8x$ upravíme na tvar $(x-4)^2 + y^2 = 16$. Odtud plyne, že zadané křivky jsou kružnice. Viz Obrázek 51.



Obrázek 51: $M: y = x, y = \sqrt{3}x, x^2 + y^2 = 4x, x^2 + y^2 = 8x$.

Obsah obrazce M určíme ze vztahu $S(M) = \iint_M dx dy$. Protože Ω je částí kruhu, provedeme transformaci do polárních souřadnic. Transformováním jednotlivých rovnic získáme, že

$$\frac{\pi}{4} \leq \varphi \leq \frac{\pi}{3},$$

$$4 \cos \varphi \leq \rho \leq 8 \cos \varphi.$$

Platí

$$\begin{aligned} \iint_M dx dy &= \iint_{M^*} \rho d\rho d\varphi = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \left(\int_{4 \cos \varphi}^{8 \cos \varphi} \rho d\rho \right) d\varphi = \frac{1}{2} \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} [\rho^2]_{4 \cos \varphi}^{8 \cos \varphi} d\varphi = \\ &= 24 \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \cos^2 \varphi d\varphi = 24 \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{1}{2} (1 + \cos 2\varphi) d\varphi = 12 \left[\varphi + \frac{1}{2} \sin 2\varphi \right]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} = \pi + 3\sqrt{3} - 6. \end{aligned}$$

3

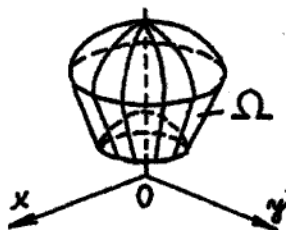
122. Příklad Spočítejte objem tělesa Ω určeného vztahy $x^2 + y^2 \leq z^2, 1 \leq x^2 + y^2 + z^2 \leq 4, z \geq 0$.

Řešení Oblast Ω je ohraničena kuželovou plochou $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ a dvěma kulovými plochami. Viz Obrázek 52. Provedeme transformaci do sférických souřadnic, kde

$$\begin{aligned} \rho &\in (1, 2), \\ \varphi &\in (0, 2\pi), \\ \vartheta &\in (0, \frac{\pi}{4}). \end{aligned}$$

Objem tělesa Ω určíme ze vztahu $V(\Omega) = \iiint_{\Omega} dx dy dz$.

$$\begin{aligned} \iiint_{\Omega} dx dy dz &= \iiint_{\Omega^*} \rho^2 \sin \vartheta d\rho d\varphi d\vartheta = \int_1^2 \rho^2 d\rho \cdot \int_0^{2\pi} d\varphi \cdot \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin \vartheta d\vartheta = \\ &= \left[\frac{\rho^3}{3} \right]_1^2 \cdot [\varphi]_0^{2\pi} \cdot [-\cos \vartheta]_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{7}{3} \cdot 2\pi \cdot \frac{2 - \sqrt{2}}{2} = \frac{7}{3} \pi (2 - \sqrt{2}). \end{aligned}$$


 Obrázek 52: $\Omega : x^2 + y^2 \leq z^2, 1 \leq x^2 + y^2 + z^2 \leq 4, z \geq 0$

(4) 123. Příklad Spočítejte objem tělesa Ω určeného vztahem $\sqrt{x^2 + y^2} \leq z \leq 6 - (x^2 + y^2)$.

Řešení Oblast Ω je ohraničena zhora paraboloidem $z = 6 - (x^2 + y^2)$ a zdola kuželovou plochou $z = \sqrt{x^2 + y^2}$. Viz Obrázek 53. Musíme zjistit, v jaké výšce se paraboloid s kuželem protnou. Vyřešíme rovnici $\sqrt{x^2 + y^2} = 6 - (x^2 + y^2)$. Máme $x^2 + y^2 + \sqrt{x^2 + y^2} - 6 = 0$. Zavedeme substituci $z = x^2 + y^2$. Odtud $z^2 + z - 6 = 0$ a $(z - 2)(z + 3) = 0$. Řešení $z = -3$ nevyhovuje. Platí tedy $z = 2$. Ve výšce $z = 2$ protne paraboloid kužel v kružnicím $x^2 + y^2 = 4$. Provedeme transformaci do válcových souřadnic. Z předchozího plyne, že

$$\begin{aligned} \rho &\in (0, 2), \\ \varphi &\in (0, 2\pi), \\ z &\in (\rho, 6 - \rho^2). \end{aligned}$$

Objem tělesa Ω určíme opět ze vztahu $V(\Omega) = \iiint_{\Omega} dx dy dz$.


 Obrázek 53: $\Omega : \sqrt{x^2 + y^2} \leq z \leq 6 - (x^2 + y^2)$

$$\begin{aligned} \iiint_{\Omega} dx dy dz &= \iiint_{\Omega^*} \rho \, d\rho d\varphi dz = \int_0^2 \left(\int_0^{2\pi} \left(\int_{\rho}^{6-\rho^2} \rho \, dz \right) d\varphi \right) d\rho = \int_0^2 \left(\int_0^{2\pi} [z\rho]_{\rho}^{6-\rho^2} d\varphi \right) d\rho = \\ &= 2\pi \int_0^2 (6\rho - \rho^2 - \rho^3) d\rho = 2\pi \left[3\rho^2 - \frac{1}{3}\rho^3 - \frac{1}{4}\rho^4 \right]_0^2 = \underline{\underline{\frac{32}{3}\pi}}. \end{aligned}$$

124. Příklad Spočítejte velikost povrchu části paraboloidu $f(x, y) = 1 - x^2 - y^2$, kde $f(x, y) \geq 0$.

Řešení Velikost povrchu S paraboloidu určíme ze vztahu $S = \iint_M \sqrt{1 + (f'_x)^2 + (f'_y)^2} \, dx dy$, kde M je kruh $x^2 + y^2 \leq 1$. Spočteme parciální derivace. Platí $f'_x = -2x$, $f'_y = -2y$. Dosadíme do výše uvedeného vztahu a pak provedeme transformaci do polárních souřadnic, kde

$$\rho \in (0, 1),$$

- (5) 126. **Příklad** Určete hmotnost krychle o straně $2a$. Hustota krychle je přímo úměrná čtverci vzdálenosti od průsečíku tělesových úhlopříček a ve vrcholech je rovna 1.

Řešení Střed krychle Ω umístíme do počátku systému souřadnic. Tedy $\Omega = (-a, a)^3$. Dále nalezneme funkci hustoty $\rho(x, y, z)$. Vzdálenost bodu $a = [x, y, z]$ od počátku je dán vztahem $d(a, o) = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$. Odtud plyne $\rho(x, y, z) = k(x^2 + y^2 + z^2)$. Konstantu přímé úměrnosti určíme dosazením souřadnic některého vrcholu. Platí $\rho(a, a, a) = k(a^2 + a^2 + a^2)$. Tedy $k = \frac{1}{3a^2}$. Celkem $\rho(x, y, z) = \frac{1}{3a^2}(x^2 + y^2 + z^2)$. Vzhledem k symetrii tělesa i funkce lze integrovat pouze přes první oktant Ω_1 . Konečně hmotnost tělesa Ω určíme ze vztahu $m(\Omega) = \iiint_{\Omega} \rho(x, y, z) dx dy dz$. Platí

$$\begin{aligned} m(\Omega) &= \iiint_{\Omega} \frac{1}{3a^2}(x^2 + y^2 + z^2) dx dy dz = \frac{8}{3a^2} \iiint_{\Omega_1} x^2 + y^2 + z^2 dx dy dz = \\ &= \frac{8}{3a^2} \int_0^a \left(\int_0^a \left(\int_0^a x^2 + y^2 + z^2 dx dy dz \right) dx \right) dy = \frac{8}{3a^2} \int_0^a \left(\int_0^a \left[x^2 z + y^2 z + \frac{1}{3} z^3 \right]_0^a dy \right) dx = \\ &= \frac{8}{3a} \int_0^a \left(\int_0^a \left(x^2 + y^2 + \frac{1}{3} a^2 \right) dy \right) dx = \frac{8}{3} \int_0^a \left(x^2 + \frac{2}{3} a^2 \right) dx = \frac{8}{3} a^3. \end{aligned}$$

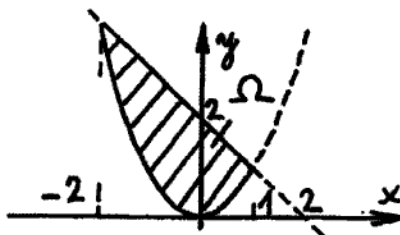
- (6) 127. **Příklad** Určete hmotnost koule o poloměru a . Hustota koule je přímo úměrná vzdálenosti od středu koule a na povrchu je rovna 1.

Řešení Střed koule Ω umístíme do počátku systému souřadnic. Nalezneme funkci hustoty $\rho(x, y, z)$. Platí $\rho(x, y, z) = k\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$. Konstantu přímé úměrnosti určíme dosazením souřadnic některého bodu na povrchu koule. Například bodu $[a, 0, 0]$. Platí $\rho(a, 0, 0) = ka$. Odtud $k = \frac{1}{a}$. Celkem $\rho(x, y, z) = \frac{1}{a}\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$. Hmotnost tělesa Ω určíme opět ze vztahu $m(\Omega) = \iiint_{\Omega} \rho(x, y, z) dx dy dz$. Je výhodné provést transformaci do sférických souřadnic. Platí

$$\begin{aligned} m(\Omega) &= \iiint_{\Omega} \frac{1}{a} \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} dx dy dz = \frac{1}{a} \iiint_{\Omega} \rho^3 \sin \vartheta d\rho d\vartheta d\varphi = \\ &= \frac{1}{a} \int_0^a \rho^3 d\rho \cdot \int_0^{2\pi} d\varphi \cdot \int_0^{\pi} \sin \vartheta d\vartheta = \frac{1}{a} \left[\frac{1}{4} \rho^4 \right]_0^a \cdot [\varphi]_0^{2\pi} \cdot [-\cos \vartheta]_0^{\pi} = \frac{1}{a} \cdot \frac{1}{4} a^4 \cdot 2\pi \cdot 2 = \frac{\pi a^3}{2}. \end{aligned}$$

- (7) 128. **Příklad** Určete těžiště rovinného obrazce M , který je ohraničen křivkami $y = x^2, x + y = 2$. Hustota obrazce je konstantní a je rovna 1.

Řešení Těžiště T rovinného obrazce M určíme ze vztahu $T = \left[\frac{S_x(M)}{m(M)}, \frac{S_y(M)}{m(M)} \right]$. Obrazec zapíšeme jako oblast typu (x, y) . Řešením rovnice $x^2 = 2 - x$ dostáváme $(x - 1)(x + 2) = 0$ a odtud $x = -2, x = 1$. Platí tedy $-2 \leq x \leq 1, x^2 \leq y \leq 2 - x$. Viz Obrázek 55.



Obrázek 55:

(7)

$$m(M) = \iint_M dx dy = \int_{-2}^1 \left(\int_{x^2}^{2-x} dy \right) dx = \int_{-2}^1 (2-x-x^2) dx = \left[2x - \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{3}x^3 \right]_{-2}^1 = \frac{9}{2}.$$

$$S_x(M) = \iint_M y dx dy = \int_{-2}^1 \left(\int_{x^2}^{2-x} y dy \right) dx = \frac{1}{2} \int_{-2}^1 (2-x)^2 - x^4 dx = \left[2x - x^2 + \frac{1}{6}x^3 - \frac{1}{10}x^5 \right]_{-2}^1 = \frac{36}{5}.$$

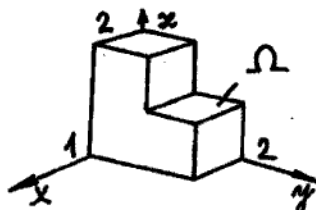
$$S_y(M) = \iint_M x dx dy = \int_{-2}^1 \left(\int_{x^2}^{2-x} x dy \right) dx = \int_{-2}^1 x(2-x-x^2) dx = \left[x^2 - \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^4 \right]_{-2}^1 = -\frac{9}{4}.$$

Odtud plyne, že $T = \left[-\frac{1}{2}, \frac{8}{5} \right]$.

(8)

129. Příklad Určete těžiště tělesa $\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2$ s konstantní hustotou, kde $\Omega_1 = (0, 1) \times (0, 1) \times (0, 2)$ a $\Omega_2 = (0, 1) \times (1, 2) \times (0, 1)$.

Řešení Těžiště T tělesa Ω určíme ze vztahu $T = \left[\frac{S_{xy}(\Omega)}{m(\Omega)}, \frac{S_{xz}(\Omega)}{m(\Omega)}, \frac{S_{yz}(\Omega)}{m(\Omega)} \right]$. Viz Obrázek 56. Je-li hustota $\rho(x, y, z) = c$, pak zřejmě $m(\Omega) = 3c$.



Obrázek 56:

$$S_{xy}(\Omega) = \iiint_{\Omega_1} cz dx dy dz + \iiint_{\Omega_2} cz dx dy dz = c \int_0^1 dx \int_0^1 dy \int_0^2 z dz + c \int_0^1 dx \int_1^2 dy \int_0^1 z dz = \frac{5}{2}c.$$

$$S_{xz}(\Omega) = \iiint_{\Omega_1} cy dx dy dz + \iiint_{\Omega_2} cy dx dy dz = c \int_0^1 dx \int_0^1 y dy \int_0^2 dz + c \int_0^1 dx \int_1^2 y dy \int_0^1 dz = \frac{5}{2}c.$$

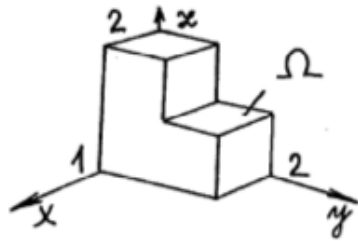
$$S_{yz}(\Omega) = \iiint_{\Omega_1} cx dx dy dz + \iiint_{\Omega_2} cx dx dy dz = c \int_0^1 x dx \int_0^1 dy \int_0^2 dz + c \int_0^1 x dx \int_1^2 dy \int_0^1 dz = \frac{3}{2}c.$$

Odtud plyne, že $T = \left[\frac{1}{2}, \frac{5}{6}, \frac{5}{6} \right]$.

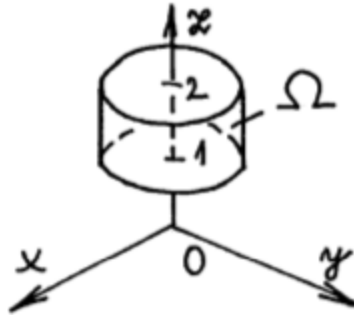
8. Přiřaďte rovnici obrázku.

- (a) 2 $\{[x, y, z] \in \mathbb{R}^3; 1 \leq z \leq 2; x^2 + y^2 \leq 1\}$
- (b) 12 $\{[x, y, z] \in \mathbb{R}^3; x^2 + y^2 \leq z^2; 1 \leq x^2 + y^2 + z^2 \leq 4; z \geq 0\}$
- (c) 4 $\{[x, y, z] \in \mathbb{R}^3; x^2 + y^2 \leq z \leq 1\}$
- (d) 6 Ohraničeno plochami $z = 0$, $z = 3$, $x^2 + y^2 - 2x = 0$ a navíc $y \geq 0$
- (e) 7 $\{[x, y, z] \in \mathbb{R}^3; x^2 + y^2 + z^2 \leq 1; z \geq 0\}$
- (f) 5 $\{[x, y, z] \in \mathbb{R}^3; 0 \leq z \leq 4 - 2\sqrt{x^2 + y^2}\}$
- (g) 9 $\{[x, y, z] \in \mathbb{R}^3; 1 \leq x^2 + y^2 + z^2 \leq 4, z \leq 0\}$
- (h) 10 $\{[x, y, z] \in \mathbb{R}^3; x^2 + 4y^2 + z^2 \leq 4\}$
- (i) 11 $\{[x, y, z] \in \mathbb{R}^3; x^2 + y^2 + z^2 \leq z\}$
- (j) 8 $\{[x, y, z] \in \mathbb{R}^3; \sqrt{x^2 + y^2} \leq z \leq 6 - (x^2 + y^2)\}$
- (k) 1 $M = M_1 \cup M_2$, kde $M_1 = [0, 1] \times [0, 1] \times [0, 2]$ a $M_2 = [0, 1] \times [1, 2] \times [0, 1]$
- (l) 3 $\{[x, y, z] \in \mathbb{R}^3; -1 \leq x \leq 1; z \geq 0; y^2 + z^2 \leq 1\}$

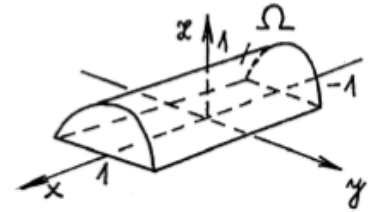
Zdroj: https://math.fme.vutbr.cz/download.aspx?id_file=602492416



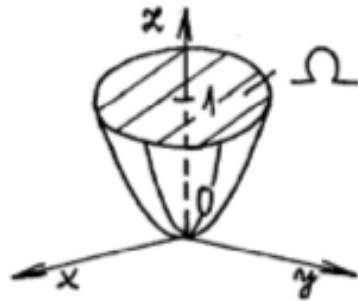
1k



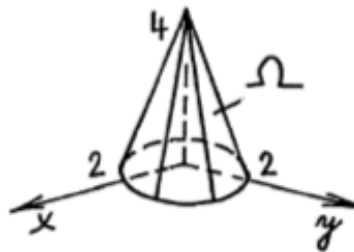
2a



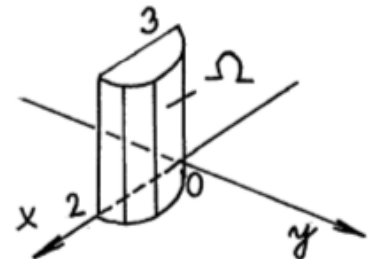
3l



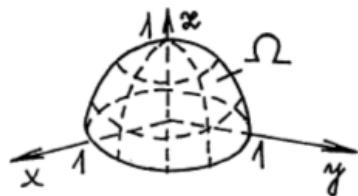
4c



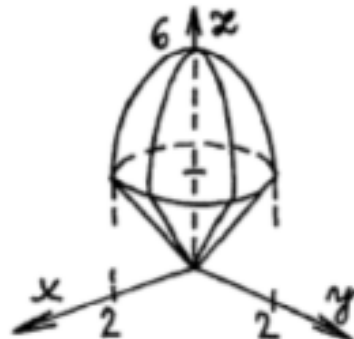
5f



6d



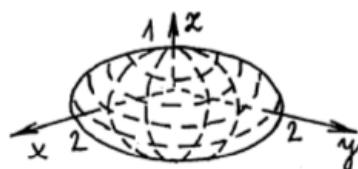
7e



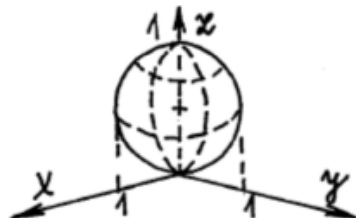
8j



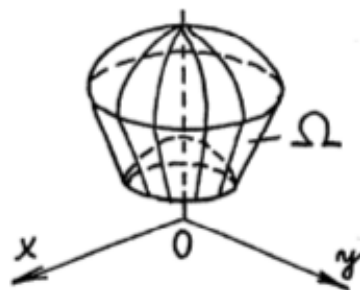
9g



10h



11i



12b