



9. cvičení – 3D integrál

<https://www2.karlin.mff.cuni.cz/~kuncova/vyuka.php>, kuncova@karlin.mff.cuni.cz

Teorie

Věta 1 (o substituci). *Nechť $G \subset \mathbb{R}^n$ je otevřená množina a $\varphi : G \rightarrow \mathbb{R}^n$ je prosté regulární zobrazení. Nechť u je funkce na $M \subset \varphi(G)$. Potom*

$$\int_M u(x) dx = \int_{\varphi^{-1}(M)} u(\varphi(t)) |J\varphi(t)| dt,$$

pokud alespoň jedna strana má smysl.

Algoritmus

1. Nakreslíme množinu.
2. Aplikujeme válcové/sférické souřadnice a najdeme meze.
3. Nezapomeneme na Jakobián a spočteme.

Hint

$$\int \sin^2 t dt = \frac{t}{2} - \frac{1}{2} \sin t \cos t \quad \int \cos^2 t dt = \frac{t}{2} + \frac{1}{2} \sin t \cos t$$

Příklady

Zdroje příkladů a řešení:

- http://mat.fsv.cvut.cz/Sibrava/Vyuka/vic_int.pdf
- https://math.fme.vutbr.cz/download.aspx?id_file=602492416
- https://fix.prf.jcu.cz/~eisner/lock/UMB-566-materialy/matematika-sbirka-II-I-Krivkovy_integral.pdf
- <https://homel.vsb.cz/~bou10/archiv/ip2.pdf>
- <https://is.muni.cz/el/1433/jaro2009/MB102/7448541/skripta4.pdf>
- <https://math.fel.cvut.cz/en/people/habala/teaching/veci-ma2/ma2r4.pdf>
- <http://www.matematika-lucerna.cz/matalyza/resene-matika3.pdf>

1. Spočítejte objem tělesa, kde $M := \{[x, y, z] \in \mathbb{R}^3; 0 \leq y \leq 1; 0 \leq x \leq \arctan y; 0 \leq z \leq \frac{6x}{1+y^2}\}$
2. Za pomoci substitucí spočítejte integrály
 - (a) $\int_M x^2 + y^2 d\lambda$, kde $M := \{[x, y, z] \in \mathbb{R}^3; 1 \leq z \leq 2; x^2 + y^2 \leq 1\}$
 - (b) Spočítejte objem množiny M , kde $M := \{[x, y, z] \in \mathbb{R}^3; -1 < x < 1, z > 0, y^2 + z^2 \leq 1\}$
 - (c) $\int_M 1 d\lambda$, kde $M := \{[x, y, z] \in \mathbb{R}^3; x^2 + y^2 + z^2 \leq 1\}$
 - (d) $\int_M \frac{1}{(x^2 + y^2 + z^2)^3} d\lambda$, kde $M = \{[x, y, z] \in \mathbb{R}^3; 1 \leq x^2 + y^2 + z^2 \leq 4, z \leq 0\}$

- (e) $\int_M \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \, d\lambda$, kde $M = \{[x, y, z] \in \mathbb{R}^3; x, y, z \geq 0; x^2 + y^2 + z^2 \leq 1\}$
- (f) Spočítejte objem tělesa, $M = \{[x, y, z] \in \mathbb{R}^3; x^2 + 4y^2 + z^2 \leq 4\}$
- (g) $\int_M z \, d\lambda$, kde $M = \{[x, y, z] \in \mathbb{R}^3; x^2 + y^2 \leq z^2 \leq 1, z \geq 0\}$
- (h) $\int_M \sqrt{x^2 + y^2} \, d\lambda$, kde $M = \{[x, y, z] \in \mathbb{R}^3; x^2 + y^2 \leq z \leq 1\}$
- (i) $\int_M z \, dA$, kde $M = \{[x, y, z] \in \mathbb{R}^3; 0 \leq z \leq 4 - 2\sqrt{x^2 + y^2}\}$

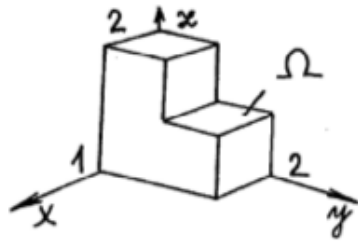
Bonus

3. Muffin: Spočítejte objem tělesa T určeného vztahy $x^2 + y^2 \leq z^2$, $1 \leq x^2 + y^2 + z^2 \leq 4$, $z \geq 0$.
4. Kornout se zmrzlinou: Spočítejte objem tělesa T určeného vztahy $x^2 + y^2 \leq z^2 \leq 6 - (x^2 + y^2)$, $z \geq 0$.
5. Určete hmotnost krychle o straně $2a$. Hustota krychle je přímo úměrná čtverci vzdálenosti od průsečíku tělesových úhlopříček a ve vrcholech je rovna 1.
6. Určete hmotnost koule o poloměru a . Hustota koule je přímo úměrná vzdálenosti od středu koule a na povrchu je rovna 1.
7. $\int_M \frac{x+y}{z+4} \, d\lambda$, kde M je ohraničená plochami $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$, $z = 4$ a $x + y = 3$.

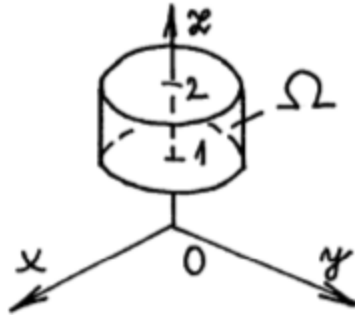
8. Přiřaďte rovnici obrázku.

- (a) $\{[x, y, z] \in \mathbb{R}^3; 1 \leq z \leq 2; x^2 + y^2 \leq 1\}$
- (b) $\{[x, y, z] \in \mathbb{R}^3; x^2 + y^2 \leq z^2; 1 \leq x^2 + y^2 + z^2 \leq 4; z \geq 0\}$
- (c) $\{[x, y, z] \in \mathbb{R}^3; x^2 + y^2 \leq z \leq 1\}$
- (d) Ohraničeno plochami $z = 0$, $z = 3$, $x^2 + y^2 - 2x = 0$ a navíc $y \geq 0$
- (e) $\{[x, y, z] \in \mathbb{R}^3; x^2 + y^2 + z^2 \leq 1; z \geq 0\}$
- (f) $\{[x, y, z] \in \mathbb{R}^3; 0 \leq z \leq 4 - 2\sqrt{x^2 + y^2}\}$
- (g) $\{[x, y, z] \in \mathbb{R}^3; 1 \leq x^2 + y^2 + z^2 \leq 4, z \leq 0\}$
- (h) $\{[x, y, z] \in \mathbb{R}^3; x^2 + 4y^2 + z^2 \leq 4\}$
- (i) $\{[x, y, z] \in \mathbb{R}^3; x^2 + y^2 + z^2 \leq z\}$
- (j) $\{[x, y, z] \in \mathbb{R}^3; \sqrt{x^2 + y^2} \leq z \leq 6 - (x^2 + y^2)\}$
- (k) $M = M_1 \cup M_2$, kde $M_1 = [0, 1] \times [0, 1] \times [0, 2]$ a $M_2 = [0, 1] \times [1, 2] \times [0, 1]$
- (l) $\{[x, y, z] \in \mathbb{R}^3; -1 \leq x \leq 1; z \geq 0; y^2 + z^2 \leq 1\}$

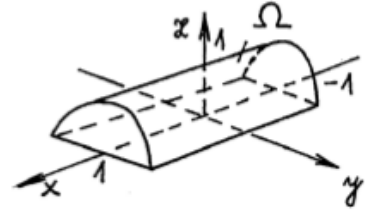
Zdroj: https://math.fme.vutbr.cz/download.aspx?id_file=602492416



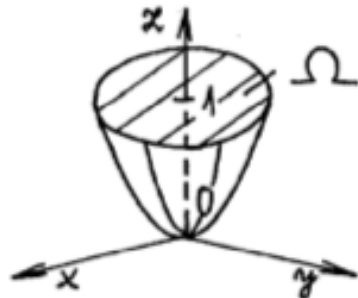
1



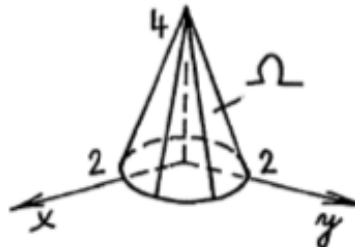
2



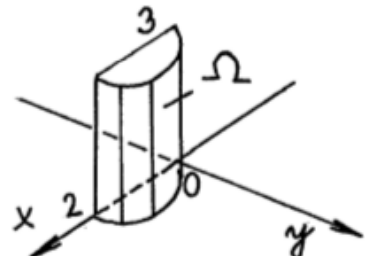
3



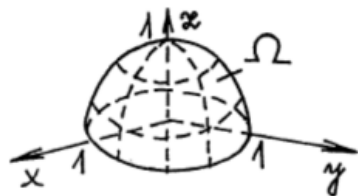
4



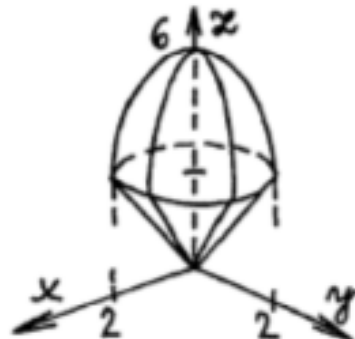
5



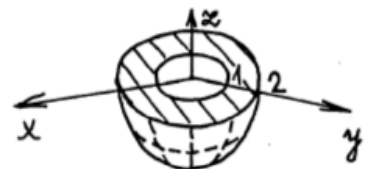
6



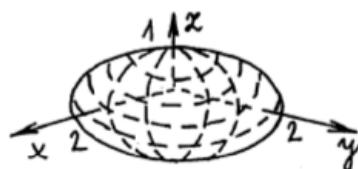
7



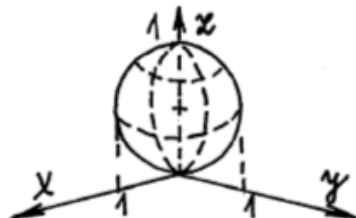
8



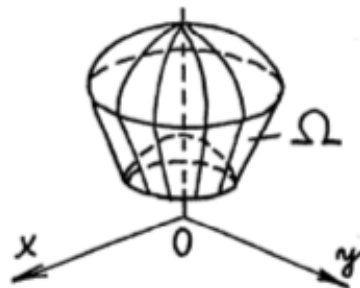
9



10



11



12