PŘÍKLADY K MATEMATICE 3 - VÍCENÁSOBNÉ INTEGRÁLY

ZDENĚK ŠIBRAVA

1. Vícenásobné intergrály

1.1. Dvojné integrály.

Příklad 1.1. *Vypočítejme dvojný integrál*

$$\int\limits_M \frac{x^2}{3+y^2}\,\mathrm{d}A,$$

kde $M = \langle 0,3\rangle \times \langle 0,1\rangle$.

Řešení: Funkce $f(x,y) = \frac{x^2}{3+y^2}$ je na obdélníku (dvojrozměrném intervalu) M spojitá. Užitím Fubiniovy věty převedeme dvojný integrál na dvojnásobný integrál (přičemž nezáleží na pořadí, ve kterém budeme integrovat) a postupnou integrací dostaneme

$$\begin{aligned}\int\limits_M \frac{x^2}{3+y^2}\,\mathrm{d}A &= \int\limits_0^3\int\limits_0^1 \frac{x^2}{3+y^2}\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x = \int\limits_0^3 \left[\frac{x^2}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{y}{\sqrt{3}}\right]_{y=0}^{y=1}\mathrm{d}x = \\ &= \frac{\pi\sqrt{3}}{18}\int\limits_0^3 x^2\,\mathrm{d}x = \frac{\pi\sqrt{3}}{2}\,.\end{aligned}$$

(1a)

Příklad 1.2. *Vypočítejme dvojný integrál*

$$\int\limits_M x\sin y\,\mathrm{d}A,$$

kde $M = \langle 1,2\rangle \times \langle 0,\pi/2\rangle$.

Řešení: Funkce $f(x,y) = x\sin y$ je na M spojitá. Pomocí Fubiniovy věty opět převedeme dvojný integrál na dvojnásobný. Protože meze pro x i y jsou konstantní, opět nezáleží v jakém pořadí budeme integrovat. Postupně dostaneme

Date:

(1a)

$$
\begin{aligned}
\int\limits_M x\sin y\,\mathrm{d}A &= \int\limits_0^{\pi/2}\int\limits_1^2 x\sin y\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int\limits_0^{\pi/2}\left[\frac{1}{2}x^2\sin y\right]_{x=1}^{x=2}\mathrm{d}y = \\
&= \frac{3}{2}\int\limits_0^{\pi/2}\sin y\,\mathrm{d}y = \frac{3}{2}\,.
\end{aligned}
$$

Příklad 1.3. *Vypočítejte dvojný integrál*

$$\int\limits_M x^2 y\,\mathrm{d}A,$$

kde $M = \langle 0,2\rangle \times \langle 1,2\rangle$. ***Výsledek:*** 4

Příklad 1.4. *Vypočítejte dvojný integrál*

$$\int\limits_M \mathrm{e}^x\, y\,\mathrm{d}A,$$

kde $M = \langle 0,1\rangle \times \langle 0,4\rangle$. ***Výsledek:*** $8(\mathrm{e}-1)$

Příklad 1.5. *Vypočítejte dvojný integrál*

$$\int\limits_M \frac{1}{(1+x+2y)^3}\,\mathrm{d}A,$$

kde $M = \langle 0,1\rangle \times \langle 0,4\rangle$. ***Výsledek:*** $\frac{11}{90}$

Příklad 1.6. *Vypočítejte dvojný integrál*

$$\int\limits_M x^2 y\,\mathrm{e}^{xy}\,\mathrm{d}A,$$

kde $M = \langle 0,1\rangle \times \langle 0,2\rangle$. ***Výsledek:*** 2

Příklad 1.7. *Vypočítejte dvojný integrál*

$$\int\limits_M xy^2\sin\left(x^2+y\right)\mathrm{d}A,$$

kde $M = \langle 0,\sqrt{\pi}\rangle \times \langle 0,\pi/2\rangle$. ***Výsledek:*** $\frac{1}{4}\pi^2 - 2$

Příklad 1.8. *Vypočítejme dvojný integrál*

$$\int\limits_M xy\,\mathrm{d}A,$$

kde M *je množina ohraničená křivkami* $y = -x$ *a* $y = x - x^2$.

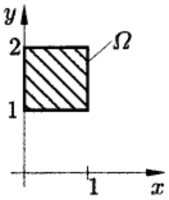
Část II

Integrální počet funkcí více proměnných

9 Dvojný integrál - Fubiniho věta

(16)! **81. Příklad** Spočtěte $\iint\limits_{\Omega} x^y \, dxdy$, kde $\Omega = \langle 0,1\rangle \times \langle 1,2\rangle$.

Řešení Integrační obor Ω je čtverec, tj. dvojrozměrný interval $\langle 0,1\rangle \times \langle 1,2\rangle$. Viz Obrázek 11. Aplikujeme Fubiniho větu. Oblast Ω budeme uvažovat jako oblast typu (y,x).



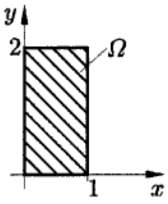
Obrázek 11: $\Omega = \langle 0,1\rangle \times \langle 1,2\rangle$

$$\iint\limits_{\Omega} x^y \mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int\limits_1^2 \Big(\int\limits_0^1 x^y \mathrm{d}x\Big)\mathrm{d}y = \int\limits_1^2 \left[\frac{x^{y+1}}{y+1}\right]_0^1 \mathrm{d}y = \int\limits_1^2 \frac{1}{y+1}\mathrm{d}y = \Big[\ln|y+1|\Big]_1^2 = \ln 3 - \ln 2 = \ln \tfrac{3}{2}.$$

V případě, že oblast Ω budeme chápat jako oblast typu (x,y), narazíme při výpočtu na integrál $\int_0^1 \frac{x^2-x}{\ln x}\mathrm{d}x$, který nelze vyřešit v množině elementárních funkcí.

82. Příklad Spočtěte $\iint\limits_{\Omega} x^2 y e^{xy} \, dxdy$, kde $\Omega = \langle 0,1\rangle \times \langle 0,2\rangle$.

Řešení Integrační obor Ω je obdélník $\langle 0,1\rangle \times \langle 0,2\rangle$. Postupujeme analogicky jako v předchozím příkladu. Aplikujeme Fubiniho větu. Oblast Ω budeme uvažovat jako oblast typu (x,y).



Obrázek 12: $\Omega = \langle 0,1\rangle \times \langle 0,2\rangle$

$$\iint\limits_{\Omega} x^2 y \mathrm{e}^{xy} \mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int\limits_0^1 \left(\int_0^2 x^2 y \mathrm{e}^{xy}\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x = \left| \begin{array}{ll} u = x^2 y, & u'_y = x^2 \\ v'_y = \mathrm{e}^{xy}, & v = \frac{1}{x}\mathrm{e}^{xy} \end{array} \right| = \int\limits_0^1 \left(\Big[xy\mathrm{e}^{xy}\Big]_0^2 - x\int\limits_0^2 \mathrm{e}^{xy}\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x =$$

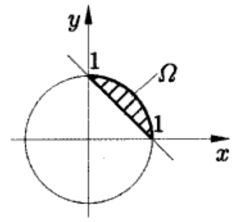
$$= \int\limits_0^1 \Big[(xy-1)\mathrm{e}^{xy}\Big]_0^2 \mathrm{d}x = \int\limits_0^1 (2x-1)\mathrm{e}^{2x} + 1 \, \mathrm{d}x = \int\limits_0^1 2x\mathrm{e}^{2x}\,\mathrm{d}x + \int\limits_0^1 \mathrm{e}^{2x}\,\mathrm{d}x + \int\limits_0^1 \mathrm{d}x = \Big[x\mathrm{e}^{2x} - \mathrm{e}^{2x} - x\Big]_0^1 = 2.$$

(17)! **83. Příklad** Spočtěte $\iint\limits_{\Omega} xy^2 \, dxdy$, kde Ω je určena vztahy $x^2+y^2-1 \le 0, x+y-1 \ge 0$.

Řešení Integrační obor Ω je ohraničen přímkou a kružnicí. Viz Obrázek 13. Oblast Ω je typu (x,y) i (y,x). Zvolme typ (x,y). Platí $\Omega = \{[x,y]; 0 \le x \le 1, 1-x \le y \le \sqrt{1-x^2}\}$. K výpočtu použijeme Fubiniho větu.

$$\iint\limits_{\Omega} xy^2 \mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int\limits_0^1 \left(\int\limits_{1-x}^{\sqrt{1-x^2}} xy^2 \mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x = \int\limits_0^1 \left[\tfrac{1}{3}xy^3\right]_{1-x}^{\sqrt{1-x^2}} \mathrm{d}x = \int\limits_0^1 \tfrac{x}{3}\left(\sqrt{(1-x^2)^3} - (1-x)^3\right)\mathrm{d}x = \tfrac{1}{20}.$$

(1f)



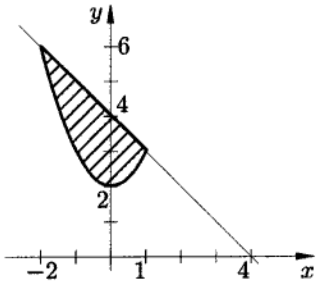
Obrázek 13: $\Omega : x^2 + y^2 - 1 \leq 0, x + y - 1 \geq 0$

Zvolíme-li typ (y, x), pak $\Omega = \{[x, y]; 0 \leq y \leq 1, 1 - y \leq x \leq \sqrt{1 - y^2}\}$. V tomto případě vede výpočet na jednodušší integrál.

$$\iint_{\Omega} xy^2 \mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_0^1 \left(\int_{1-y}^{\sqrt{1-y^2}} xy^2 \mathrm{d}x \right) \mathrm{d}y = \int_0^1 \left[\tfrac{1}{2} x^2 y^2 \right]_{1-y}^{\sqrt{1-y^2}} \mathrm{d}x = \int_0^1 (y^3 - y^4) \mathrm{d}y = \tfrac{1}{20}.$$

(1c) **84. Příklad** Spočtěte $\iint_{\Omega} y \,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$, kde Ω je určena vztahy $x^2 - y + 2 = 0, x + y - 4 = 0$.

Řešení Integrační obor Ω je ohraničen přímkou a parabolou. Viz Obrázek 14. Popišme obor Ω jako oblast typu (x, y). Krajní meze x-ové souřadnice oblasti získáme jako x-ové souřadnice průsečíků přímky a paraboly. Řešíme $x^2 + 2 = 4 - x$. Odtud $x^2 + x - 2 = 0$ a $x_1 = -2$, $x_2 = 1$. Platí $\Omega = \{[x, y]; -2 \leq x \leq 1, x^2 + 2 \leq y \leq 4 - x\}$.



Obrázek 14: $\Omega : x^2 - y + 2 = 0, x + y - 4 = 0$

$$\iint_{\Omega} y \,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_{-2}^{1} \left(\int_{x^2+2}^{4-x} y \,\mathrm{d}y \right) \mathrm{d}x = \int_{-2}^{1} \left[\tfrac{1}{2} y^2 \right]_{x^2+2}^{4-x} \mathrm{d}x = \int_{-2}^{1} \tfrac{1}{2} \left((4 - x)^2 - (x^2 + 2)^2 \right) \mathrm{d}x = \tfrac{81}{5}.$$

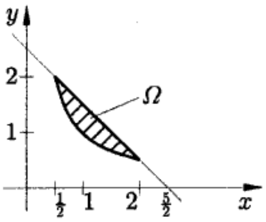
85. Příklad Spočtěte $\iint_{\Omega} xy \,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$, kde Ω je určena vztahy $xy = 1, 2x + 2y - 5 = 0$.

Řešení Integrační obor Ω je ohraničen přímkou a hyperbolou. Viz Obrázek 15. Popišme obor Ω jako oblast typu (x, y). Krajní meze x-ové souřadnice oblasti získáme jako x-ové souřadnice průsečíků přímky a hyperboly. Řešíme $x\left(\frac{5}{2} - x\right) = 1$. Odtud $2x^2 - 5x + 2 = 0$ a $x_1 = \frac{1}{2}$, $x_2 = 2$. Platí $\Omega = \left\{[x, y]; \frac{1}{2} \leq x \leq \leq 2, \frac{1}{x} \leq y \leq \frac{5}{2} - x\right\}$.

$$\iint_{\Omega} xy \,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_{\frac{1}{2}}^{2} \left(\int_{\frac{1}{x}}^{\frac{5}{2}-x} xy \,\mathrm{d}y \right) \mathrm{d}x = \int_{\frac{1}{2}}^{2} \left[\tfrac{1}{2} xy^2 \right]_{\frac{1}{x}}^{\frac{5}{2}-x} \mathrm{d}x = \tfrac{1}{2} \int_{\frac{1}{2}}^{2} \left(x\left(\tfrac{5}{2} - x\right) - \tfrac{1}{x} \right) \mathrm{d}x = \tfrac{165}{128} - \ln 2.$$

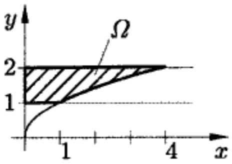
(1e) **86. Příklad** Spočtěte $\iint_{\Omega} \mathrm{e}^{\frac{x}{y}} \,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$, kde Ω je určena vztahy $x = 0, y = 1, y = 2, y^2 = x$.

Řešení Integrační obor Ω je ohraničen přímkou a parabolou. Viz Obrázek 16. Popišme obor Ω jako oblast typu (y, x). Platí $\Omega = \{[x, y]; 1 \leq y \leq 2, 0 \leq y \leq y^2\}$.



Obrázek 15: $\Omega : xy = 1, 2x + 2y - 5 = 0$

(1e)



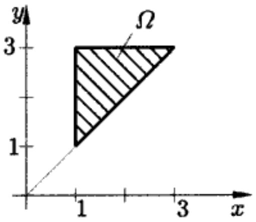
Obrázek 16: $\Omega : x = 0, y = 1, y = 2, y^2 = x$

$$\iint_\Omega e^{\frac{x}{y}}\,dxdy = \int_1^2 \left(\int_0^{y^2} e^{\frac{x}{y}}\,dx \right) dy = \int_1^2 \left[y e^{\frac{x}{y}} \right]_0^{y^2} dy = \int_1^2 (ye^y - y)\,dy = \left[ye^y - e^y - \tfrac{1}{2}y^2 \right]_1^2 = e^2 - \tfrac{3}{2}.$$

(1d)

87. Příklad Spočtěte $\iint_\Omega \frac{x}{y^2}\,dxdy$, kde Ω je určena vztahy $1 \le x \le y \le 3$.

Řešení Integrační obor Ω je ohraničen třemi přímkami. Viz Obrázek 17. Popišme obor Ω jako oblast obou typů. Pro typ (x, y) platí $\Omega = \{[x, y]; 1 \le x \le 3, x \le y \le 3\}$ a pro typ (y, x) platí $\Omega =$ $= \{[x, y]; 1 \le y \le 3, 1 \le x \le y\}$. Výpočet provedeme pro oba typy.



Obrázek 17: $\Omega : 1 \le x \le y \le 3$

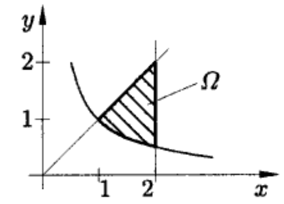
$$\iint_\Omega \tfrac{x}{y^2}\,dxdy = \int_1^3 \left(\int_x^3 \tfrac{x}{y^2}\,dy \right) dx = \int_1^3 \left[-\tfrac{x}{y} \right]_x^3 dx = \int_1^3 \left(1 - \tfrac{x}{3}\right) dx = \left[x - \tfrac{x^2}{6} \right]_1^3 = \tfrac{2}{3}.$$

$$\iint_\Omega \tfrac{x}{y^2}\,dxdy = \int_1^3 \left(\int_1^y \tfrac{x}{y^2}\,dx \right) dy = \int_1^3 \left[\tfrac{x^2}{2y^2} \right]_1^y dy = \tfrac{1}{2}\int_1^3 \left(1 - \tfrac{1}{y^2}\right) dy = \tfrac{1}{2}\left[y + \tfrac{1}{y} \right]_1^3 = \tfrac{2}{3}.$$

88. Příklad Spočtěte $\iint_\Omega \frac{x^2}{y^2}\,dxdy$, kde Ω je určena vztahy $x = 2, y = x, xy = 1$.

Řešení Integrační obor Ω je ohraničen dvěma přímkami a hyperbolou. Viz Obrázek 18. Popišme obor Ω jako oblast typu (x, y). Platí $\Omega = \{[x, y]; 1 \le x \le 2, \frac{1}{x} \le y \le x\}$.

$$\iint_\Omega \tfrac{x^2}{y^2}\,dxdy = \int_1^2 \left(\int_{\frac{1}{x}}^x \tfrac{x^2}{y^2}\,dy \right) dx = \int_1^2 \left[-\tfrac{x^2}{y} \right]_{\frac{1}{x}}^x dx = \int_1^2 (x^3 - x)\,dx = \left[\tfrac{1}{4}x^4 - \tfrac{1}{2}x^2 \right]_1^2 = \tfrac{9}{4}.$$

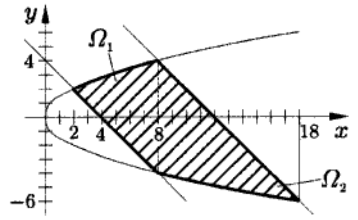


Obrázek 18: $\Omega : x = 2, y = x, xy = 1$

(19)

89. Příklad Spočtěte $\iint\limits_{\Omega} \mathrm{d}x\mathrm{d}y$, kde Ω je určena vztahy $x + y = 4, x + y = 12, y^2 = 2x$.

Řešení Integrační obor Ω je ohraničen dvěma přímkami a parabolou. Viz Obrázek 19. Je zřejmé, že obor Ω je nutné rozdělit na dvě části Ω_1 a Ω_2 tak, že $\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2$. Oblasti Ω_1, Ω_2 popíšeme jako oblasti typu (x, y). Platí $\Omega_1 = \{[x, y]; 0 \le x \le 8, 4 - x \le y \le \sqrt{2x}\}$ a $\Omega_2 = \{[x, y]; 8 \le x \le 18, -\sqrt{2x} \le y \le 12 - x\}$.

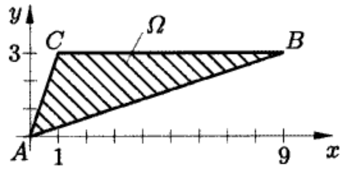


Obrázek 19: $\Omega : x + y = 4, x + y = 12, y^2 = 2x$

$$\iint\limits_{\Omega} \mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iint\limits_{\Omega_1} \mathrm{d}x\mathrm{d}y + \iint\limits_{\Omega_2} \mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int\limits_2^8 \left(\int\limits_{4-x}^{\sqrt{2x}} \mathrm{d}y \right) \mathrm{d}x + \int\limits_8^{18} \left(\int\limits_{-\sqrt{2x}}^{12-x} \mathrm{d}y \right) \mathrm{d}x = \int\limits_2^8 (\sqrt{2x} + x - 4)\mathrm{d}x + \int\limits_8^{18} (\sqrt{2x} -$$
$$- x + 12)\mathrm{d}x = \tfrac{74}{3} + \tfrac{122}{3} = 62.$$

90. Příklad Spočtěte $\iint\limits_{\Omega} \sin y^2 \, \mathrm{d}x\mathrm{d}y$, kde Ω je určena body $A = [0, 0], B = [9, 3], C = [1, 3]$.

Řešení Integrační obor Ω je ohraničen přímkami. Viz Obrázek 20. Obor Ω popíšeme jako oblast typu (y, x). Platí $\Omega = \{[x, y]; 0 \le y \le 3, \frac{1}{3}y \le x \le 3y\}$. Volba typu (x, y) vede k rozdělení oblasti na dvě části a navíc k integálu $\int \sin y^2 \, \mathrm{d}y$. Tento integrál nelze vyřešit nad množinou elementárních funkcí.



Obrázek 20: $\Omega : A = [0, 0], B = [9, 3], C = [1, 3]$

$$\iint\limits_{\Omega} \cos y^2 \mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int\limits_0^3 \left(\int\limits_{\frac{y}{3}}^{3y} \cos y^2 \mathrm{d}x \right) \mathrm{d}y = \int\limits_0^3 \Big[x \cos y^2 \Big]_{\frac{y}{3}}^{3y} \mathrm{d}y = \tfrac{4}{3} \int\limits_0^3 2y \cos y^2 \mathrm{d}y = \left| \begin{array}{c} t = y^2 \\ 0 \to 0, 3 \to 9 \end{array} \right| =$$
$$= \tfrac{4}{3} \int\limits_0^9 \cos t dt = \tfrac{4}{3} \Big[\sin t \Big]_0^9 = \tfrac{4}{3} \sin 9.$$

(2a) $x = \cancel{t} \cos \alpha$ $\quad \alpha \in [0, 2\pi]$

$y = t \sin \alpha$ $\quad t \in [0, r]$

$$\int_0^{2\pi} \int_0^r 1 \cdot t \, dt \, d\alpha = \int_0^{2\pi} \left[\frac{1}{2} t^2\right]_0^r d\alpha =$$

$$= \int_0^{2\pi} \frac{1}{2} r^2 \, d\alpha = \frac{r^2}{2} \left[\alpha\right]_0^{2\pi} = \underline{\underline{\pi r^2}}$$

19. $\iint\limits_D |y - x^2|\, dxdy$, $D: y = \sqrt{x}$, $y = x^4$ pro $x \geq 0$ $\left[\frac{13}{140}\right]$

20. $\iint\limits_D |y - x^2|\, dxdy$, $D: y = \sqrt{2-x}$, $y = 0$ pro $x \geq 0$ $\left[\frac{512\sqrt{2}-238}{420}\right]$

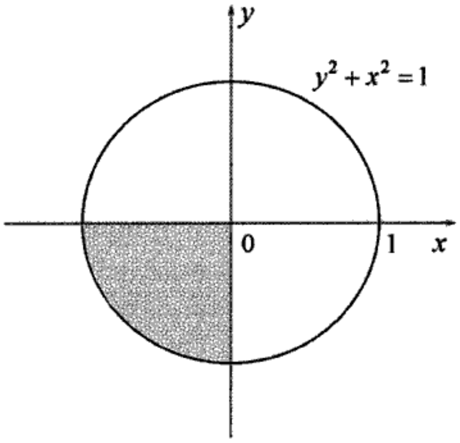
1.2 Transformace dvojného integrálu

(2b)

Příklad 1: Vypočtěte integrál $\iint\limits_D e^{-x^2-y^2}\, dxdy$, kde množina

$$D = \left\{ [x, y] \in \mathbf{E_2};\ x^2 + y^2 \leq 1,\ x \leq 0,\ y \leq 0 \right\}.$$

Řešení: Funkce $f(x, y) = e^{-x^2-y^2}$ je na oblasti D spojitá a ohraničená. Dvojný integrál existuje. Množina D je výseč kruhu se středem v počátku souřadného systému - viz Obrázek 1.7. Výpočet provedeme transformací dvojného integrálu do polárních souřadnic:

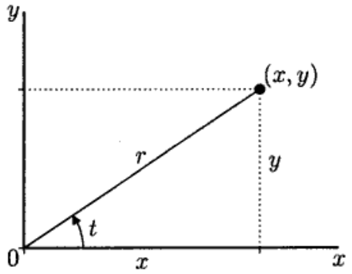


Obrázek 1.7: $D = \{ [x, y] \in \mathbf{E_2};\ x^2 + y^2 \leq 1,\ x \leq 0,\ y \leq 0\}$

$$\begin{array}{lll} x = \varrho\cos\varphi & D^*: & 0 \leq \varrho \leq 1 \\ y = \varrho\sin\varphi & & \pi \leq \varphi \leq \frac{3}{2}\pi \\ |J| = \varrho & & \end{array}$$

Potom

$$\begin{aligned}
\iint\limits_D e^{-x^2-y^2}\, dxdy &= \iint\limits_{D^*} e^{-\varrho^2} \varrho\, d\varrho d\varphi = \int_0^1 \left(\int_\pi^{\frac{3}{2}\pi} \varrho\, e^{-\varrho^2} d\varphi \right) d\varrho = \int_0^1 \varrho\, e^{-\varrho^2} \left[\varphi\right]_\pi^{\frac{3}{2}\pi} d\varrho \\
&= \frac{1}{2}\pi \int_0^1 \varrho e^{-\varrho^2} d\varrho = \left| \begin{array}{c} t = -\varrho^2 \\ dt = -2\varrho\, d\varrho \end{array} \quad \begin{array}{c|c} \varrho & t \\ \hline 0 & 0 \\ 1 & -1 \end{array} \right| = -\frac{\pi}{4} \int_0^{-1} e^t\, dt \\
&= \frac{\pi}{4}\left(1 - e^{-1}\right).
\end{aligned}$$



Přímým výpočtem zjistíme, že

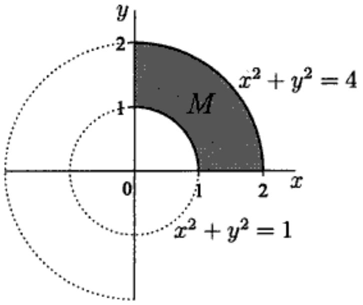
$$J(r,t) = \begin{vmatrix} \cos t & -r\sin t \\ \sin t & r\cos t \end{vmatrix} = r\cos^2 t + r\sin^2 t = r.$$

Poznámka 1.35. Tuto substituci lze zpravidla s úspěchem aplikovat v případech, že hranice množiny M, přes kterou integrujeme, obsahuje části kružnic. Vhodnost této substituce však také závisí na integrované funkci.

(2c) **Příklad 1.36.** Vypočtěte integrál $I = \iint\limits_M x \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$, kde

$$M = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \colon\ x \geqq 0 \ \wedge\ y \geqq 0 \ \wedge\ 1 \leqq x^2 + y^2 \leqq 4\right\}.$$

Řešení. Množina M je čtvrtina mezikruží se středem v počátku a s poloměry 1 a 2.



Bude proto vhodné zavést polární souřadnice

$$x = r\cos t, \quad y = r\sin t \qquad (J(r,t) = r).$$

Pokusíme se tedy množinu M popsat v těchto nových souřadnicích. Vzhledem ke geometrickému významu proměnné t snadno dostaneme první omezení $0 \leqq t \leqq \frac{\pi}{2}$. Nyní si představme, že úhel t je zafixován a zkoumejme, jak se může měnit r (vzdálenost od počátku). Z obrázku vidíme, že $1 \leqq r \leqq 2$. Proto platí

$$M = \left\{(r\cos t, r\sin t) \in \mathbb{R}^2 \colon\ 0 \leqq t \leqq \frac{\pi}{2} \ \wedge\ 1 \leqq r \leqq 2\right\}. \tag{1.2}$$

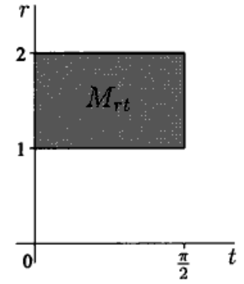
Položme

$$\Omega_{rt} = (0, +\infty) \times (-\pi, \pi)$$

a

$$M_{rt} = \left\{(r,t) \in \mathbb{R}^2 \colon\ 0 \leqq t \leqq \frac{\pi}{2} \ \wedge\ 1 \leqq r \leqq 2\right\}.$$

(2c)



Věta 1.30 (s využitím poznámky 1.33) dává

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\int_1^2 r \cos t \cdot \underbrace{|J(r,t)|}_{r} \, \mathrm{d}r \right) \mathrm{d}t = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\int_1^2 r^2 \cos t \, \mathrm{d}r \right) \mathrm{d}t =$$

$$= \left(\int_1^2 r^2 \, \mathrm{d}r \right) \cdot \left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos t \, \mathrm{d}t \right) = \left[\frac{r^3}{3} \right]_1^2 \cdot [\sin t]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{7}{3}.$$

▲

Poznámka 1.37. Pokud bychom omezení (1.2) nedokázali sestavit na základě obrázku, museli bychom ho získat výpočtem – a to tak, že transformační vztahy

$$x = r \cos t, \quad y = r \sin t$$

dosadíme do nerovností, jimiž je množina M zadaná. Přitom přihlédneme k tomu, že $r \geqq 0$ a $t \in \langle -\pi, \pi \rangle$.

V našem případě bychom dostali

$$r \cos t \geqq 0, \quad r \sin t \geqq 0 \quad \text{a} \quad 1 \leqq \underbrace{r^2 \cos^2 t + r^2 \sin^2 t}_{r^2} \leqq 4.$$

Z poslední podmínky (a $r \geqq 0$) získáme $1 \leqq r \leqq 2$ a z prvních dvou poté dostaneme $\cos t \geqq 0$ a $\sin t \geqq 0$, odkud (vzhledem k $t \in \langle -\pi, \pi \rangle$) plyne, že t leží v prvním kvadrantu, tj. $0 \leqq t \leqq \frac{\pi}{2}$.

Příklad 1.38. Vypočtěte integrál $I = \iint\limits_M \frac{1}{(x^2+y^2)^2} \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y$, kde

$$M = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \colon \frac{x}{\sqrt{3}} \leqq y \leqq 2x \ \wedge \ x \leqq x^2 + y^2 \leqq 3x \right\} \setminus \{(0,0)\}.$$

Řešení.

křivkou stačí počítat obsah pouze té části M, která leží v prvním kvadrantu a výsledek násobit čtyřmi. Pro výpočet integrálu použijeme substituci do polárních souřadnic. Dosazením (4) do nerovnice určující M dostaneme

$$0 \le (x^2+y^2)^2 \le x^2-y^2,$$
$$0 \le r^4 \le r^2(\cos^2\phi - \sin^2\phi),$$
$$0 \le r \le \sqrt{\cos^2\phi - \sin^2\phi} = \sqrt{\cos 2\phi}. \tag{7}$$

Z podmínky (7) dostáváme $0 \le r \le \sqrt{\cos 2\phi}$ a dále

$$\cos 2\phi \ge 0, \quad \text{tj.} \quad \phi \in \langle -\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\rangle \cup \langle \frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}\rangle. \tag{8}$$

Podle předpokladu počítáme obsah pouze té části M, pro kterou je $x \ge 0$ a $y \ge 0$, tj.

$$\cos\phi \ge 0 \wedge \sin\phi \ge 0 \Rightarrow \phi \in \langle 0, \frac{\pi}{2}\rangle.$$

Spolu s (8) tedy dostáváme $\phi \in \langle 0, \frac{\pi}{4}\rangle$. Potom

$$\mu(M) = \int_M \mathrm{d}A = 4\int_0^{\pi/4}\left(\int_0^{\sqrt{\cos 2\phi}} r\,\mathrm{d}r\right)\mathrm{d}\phi = 2\int_0^{\pi/4}\cos 2\phi\,\mathrm{d}\phi = 1\ .$$

(2d)

Příklad 1.27. *Vypočítejme dvojný integrál*

$$\int_M (x^2+y^2)\,\mathrm{d}A,$$

kde $M = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} \le 1\right\}$.

Řešení: Protože v tomto případě je množina M ohraničená elipsou (Obr. 11), bude výhodné použít substituci pomocí zobecněných polárních souřadnic

$$x = ar\cos\phi, \quad y = br\sin\phi \quad \text{a } J = abr, \tag{9}$$

V zobrazení (9) (uvažovaném na množině $(0,+\infty) \times (0, 2\pi))$ má elipsa $x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$ rovnici $r = 1$.

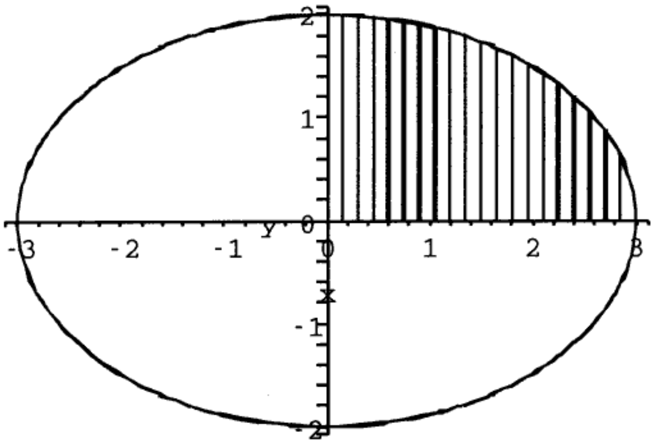
Při výpočtu integrálu opět stačí, budeme-li integrovat pouze přes část M, která leží v prvním kvadrantu. Použitím substituce (9), kde $a = 3$, $b = 2$, tj.

$$x = 3r\cos\phi, \quad y = 2r\sin\phi \quad \text{a } J = 6r,$$

a dosazením do M (za podmínky $x \ge 0$, $y \ge 0$) dostaneme

$$0 \le r \le 1, \quad 0 \le \phi \le \frac{\pi}{2}.$$

(2d)



Obr. 11

Odtud

$$\mu(M) = \int\limits_M (x^2+y^2)\,\mathrm{d}A \;=\; 4\int\limits_0^{\pi/2}\left(\int\limits_0^1 \left(9r^2\cos^2\phi + 4r^2\sin^2\phi\right)6r\,\mathrm{d}r\right)\mathrm{d}\phi =$$

$$= 6\int\limits_0^{\pi/2}\left(9\cos^2\phi + 4\sin^2\phi\right)\mathrm{d}\phi = \frac{39}{2}\pi\,.$$

Příklad 1.28. *Vypočítejme obsah části kuželové plochy $z=\sqrt{x^2+y^2}$, kterou z ní vytne parabolický válec $z^2=2x$ (Obr. 12).*

Řešení: Víme, že pro obsah S plochy P, která je částí grafu funkce $z=f(x,y)$, $(x,y)\in M$ platí

$$S = \int\limits_M \sqrt{1+\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2}\,\mathrm{d}A. \qquad (10)$$

V našem případě je plocha částí grafu funkce $f(x,y)=\sqrt{x^2+y^2}$. Hranici množiny M najdeme jako (pravoúhlý) průmět průniku ploch $z=\sqrt{x^2+y^2}$ a $z^2=2x$ do roviny $z=0$

$$\sqrt{2x}=\sqrt{x^2+y^2}, \quad \text{tj}, \quad x^2+y^2=2x,\ z=0.$$

Je tedy

$$M=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : (x-1)^2+y^2\le 1\right\}.$$

Množina M je tedy kruh se středem v bodě $(1,0)$ a poloměrem 1. Dále je

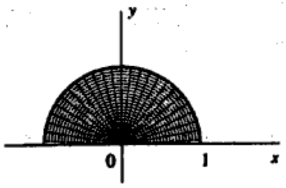
$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}=\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}, \quad \frac{\partial f(x,y)}{\partial y}=\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

III.4. Substituční metoda pro dvojný integrál

(2e)

***Příklad* 300.** Rozhodněte, zda integrál $\iint_D \operatorname{arctg}\frac{y}{x}\,dx\,dy$, kde $D = \{[x,y] \in E_2 : x^2+y^2 \le 1,\ y \ge 0\}$ existuje a v kladném případě jej spočítejte.

Řešení :



Funkce $f(x,y) = \operatorname{arctg}\frac{y}{x}$ je nespojitá na ose y (tj. $x = 0$). Nicméně, množina D je měřitelná a funkce f je na D omezená, neboť $|\operatorname{arctg}\frac{y}{x}| \le \frac{\pi}{2}$ pro všechny body $[x,y] \in E_2$. Proto daný integrál existuje. Víme, že

$$\iint_D f(x,y)\,dx\,dy = \iint_{B(u,v)} f\Big(x(u,v),y(u,v)\Big)|J|\,du\,dv.$$

Zde použijeme transformaci do polárních souřadnic.

$$\iint_D \operatorname{arctg}\frac{y}{x}\,dx\,dy = \left[\begin{array}{lcl} x = r\cos\varphi & & 0 \le r \le 1 \\ y = r\sin\varphi & | & 0 \le \varphi \le \pi \\ J = r & & \end{array}\right] = \int_0^{\pi}\left(\int_0^1 \varphi\cdot r\,dr\right)d\varphi =$$

$$= \int_0^{\pi}\varphi\,d\varphi\cdot\int_0^1 r\,dr = \left[\frac{\varphi^2}{2}\right]_0^{\pi}\cdot\left[\frac{r^2}{2}\right]_0^1 = \frac{\pi^2}{4}.$$

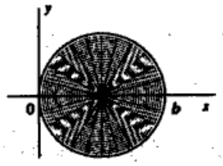
■

- Vypočítejte integrály :

***Příklad* 301.** $\iint_D \sqrt{x^2+y^2}\,dx\,dy,\ D = \{[x,y] \in E_2 : x^2+y^2-bx \le 0\},\ b > 0$

Řešení :

$$D: \left(x-\frac{b}{2}\right)^2 + y^2 \le \frac{b^2}{4}$$



$$\iint_D \sqrt{x^2+y^2}\,dx\,dy = \left[\begin{array}{lcc} x = r\cos\varphi & & x^2+y^2 \le bx \longrightarrow r^2 \le br\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi & | & 0 \le r \le b\cos\varphi \longrightarrow \cos\varphi \ge 0 \\ J = r & & -\frac{\pi}{2} \le \varphi \le \frac{\pi}{2} \end{array}\right] =$$

$$= \int_{-\pi/2}^{\pi/2}\left(\int_0^{b\cos\varphi} r\cdot r\,dr\right)d\varphi = \int_{-\pi/2}^{\pi/2}\left[\frac{r^3}{3}\right]_0^{b\cos\varphi}d\varphi = \frac{1}{3}\int_{-\pi/2}^{\pi/2} b^3\cos^3\varphi\,d\varphi =$$

$$= \frac{2}{3}b^3\int_0^{\pi/2}\cos^3\varphi\,d\varphi = \frac{2}{3}b^3\cdot\frac{2}{3\cdot 1}\cdot 1 = \frac{4}{9}b^3.$$

■

***Příklad* 302.** $\iint_D \ln(1+x^2+y^2)\,dx\,dy,\ D: x^2+y^2 \le a^2,\ x \le 0$

Řešení :

(2f) $\int_M \frac{\ln(x^2+y^2)}{x^2+y^2}\, d\lambda$

$1 \leq x^2+y^2 \leq e \qquad y \geq 0$

$1 \leq r^2 \leq e \qquad r\sin\alpha \geq 0$

$r \geq 0 \qquad \sin\alpha \geq 0$

$\alpha \in [0, \pi]$

$$\int_0^{\pi} \int_1^{\sqrt{e}} \frac{\ln r^2}{r^2} \cdot r \; dr \, d\alpha$$

$$= \int_0^{\pi} \left[\frac{1}{4} \ln^2 r^2\right]_1^{\sqrt{e}} d\alpha = \int_0^{\pi} \frac{1}{4}\, d\alpha = \frac{\pi}{4}$$

$$\int \frac{\ln r^2}{r^2} \cdot \frac{2r}{2}\, dr = \int \frac{1}{2} \frac{\ln t}{t}\, dt = \int \frac{1}{2} z\, dz = \frac{1}{4} z^2$$

$r^2 = t \qquad z = \ln t \qquad = \frac{1}{4} \ln^2 r^2$

$2r\,dr = dt \qquad dz = \frac{1}{t}\, dt$

(2g) $\int\limits_{M} \sin \sqrt{x^2+y^2}\, d\lambda$ $\qquad \pi^2 \leq x^2+y^2 \leq 4\pi^2$

$\alpha \in [-\pi, \pi] \qquad r \in [\pi, 2\pi]$

$$\int\limits_{-\pi}^{\pi}\int\limits_{\pi}^{2\pi} r \sin \sqrt{r^2}\, dr\, d\alpha = \int\limits_{-\pi}^{\pi} \Big[-r\cos r + \sin r\Big]_{\pi}^{2\pi} d\alpha$$

$\alpha \qquad r$

$$= \int\limits_{-\pi}^{\pi} -2\pi - \pi \, d\alpha = -6\pi^2$$

$$\int \underset{u}{r}\, \underset{v'}{\sin r}\, dr \overset{\text{Per Partes}}{=} -r\cos r + \int \cos r = -r\cos r + \sin r$$

$u' = 1 \qquad v = -\cos r$

Teď integrujeme danou funkci.

$$\iint_{\Omega} 2e^{x/y}\,dA = \int_0^1 \int_x^{\sqrt{x}} 2e^{x/y}\,dy\,dx.$$

Máme drobný problém, integrál $\int e^{a/y}\,dy$ je dost drsný, jeden z těch, které nejdou vyjádřit pomocí elementárních funkcí. Naštěstí máme alternativu, zkusíme vodorovné řezy a doufáme, že vyjdou lepší integrály. Pro dané y se hodnoty x na odpovídajícím řezu mění mezi $x = y^2$ a $x = y$ (pěkné vzorce, možná jsme tak měli dělat i ten obsah). Dostáváme

$$\iint_{\Omega} 2e^{x/y}\,dA = \int_0^1 \int_{y^2}^{y} 2e^{x/y}\,dx\,dy.$$

Toto je mnohem snažší, potřebujeme najít $\int e^{x/a}\,dx$, což je standardní integrál, který se nejlépe dělá substitucí. Nakonec také budeme potřebovat integraci per partes.

$$\iint_{\Omega} 2e^{x/y}\,dA = \int_0^1 \int_{y^2}^{y} 2e^{x/y}\,dx\,dy = \left| \begin{aligned} w &= \tfrac{x}{y} \\ dw &= \tfrac{1}{y}\,dx \\ dx &= y\,dw \\ x = y &\mapsto w = 1 \\ x = y^2 &\mapsto w = y \end{aligned} \right| = \int_0^1 \int_y^1 2e^{w} y\,dw\,dy$$

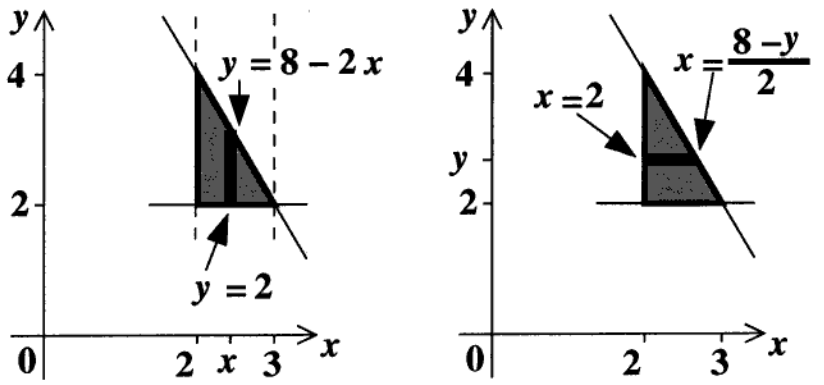
$$= \int_0^1 \Big[2y\,e^{w}\Big]_{w=y}^{w=1} dy = \int_0^1 2e\,y - 2y\,e^{y}\,dy = e\int_0^1 2y\,dy - \int_0^1 2y\,e^{y}\,dy$$

$$= e\Big[y^2\Big]_0^1 - \Big[2y\,e^{y}\Big]_0^1 + \int_0^1 2\,e^{y}\,dy = e - 2e + \Big[2\,e^{y}\Big]_0^1 = e - 2.$$

Průměr je tedy

$$\frac{1}{A(\Omega)} \iint_{\Omega} 2e^{x/y}\,dA = 6e - 12.$$

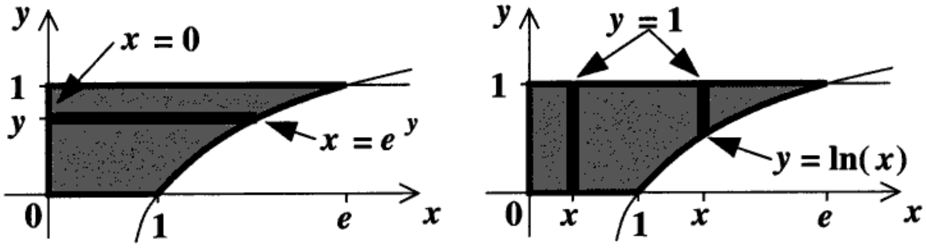
6. Nejprve potřebujeme zjistit, přes jakou oblast Ω integrujeme. Vnitřní proměnnou je y, která
(3a) nás pohybuje nahoru a dolů, takže jdeme po svislých řezech. Pozice těchto řezů jsou dány hodnotami x, takže ten nejvíce vlevo je na přímce $x = 2$ a ten nejvíce vpravo na přímce $x = 3$. Z limit vnitřního integrálu vidíme, že pro dané x jde odpovídající svislý řez od křivky $y = 2$ po křivku $y = 8 - 2x$, takže Ω je oblast mezi těmito dvěma křivkami. Nakreslíme obrázek.



Změna pořadí integrace znamená přepnout na ten druhý směr řezů (viz obrázek vpravo). Vodorovné řezy jsou dány volbou nějakého y mezi 2 a 4 (to bude vnější integrál), pro takové y se proměnná x pohybuje mezi $x = 2$ a $x = \frac{1}{2}(8 - y)$ (to dostaneme vyřešením vztahu $y = 8 - 2x$ pro x). Dostáváme integrál

$$\int_2^4 \int_2^{(8-y)/2} f(x,y)\,dx\,dy.$$

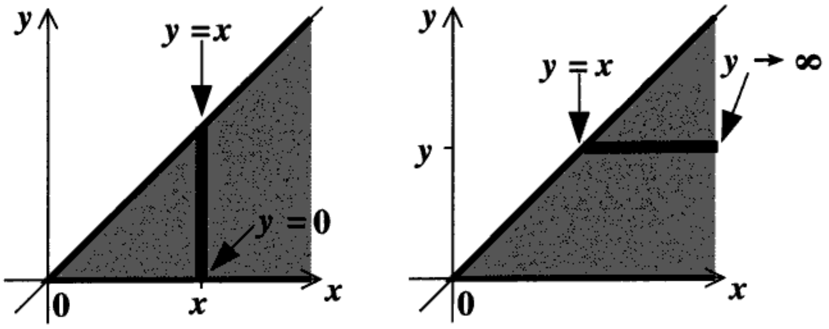
(3b) **7.** Začneme určením oblasti integrace Ω. Vnitřní proměnná je x udávající pohyb doprava a doleva, což znamená, že jdeme po vodorovných řezech, nejnižší je na přímce $y = 0$ a nejvyšší u $y = 1$. Řezy sahají od křivky $x = 0$ po křivku $x = e^y$, což je $y = \ln(x)$. Teď jsme připraveni to nakreslit.



Pro změnu pořadí integrace přejdeme na svislé řezy, ale obrázek jasně ukazuje, že pak máme dva typy řezů, jinými slovy, dostaneme dva integrály: Pro x mezi 0 a 1 jdou svislé řezy od $y = 0$ po $y = 1$, pro x mezi 1 a e jdou svislé řezy od $y = \ln(x)$ po $y = 1$. Dostáváme

$$\int_0^1 \int_0^1 f(x,y)\,dy\,dx + \int_1^e \int_{\ln(x)}^1 f(x,y)\,dy\,dx.$$

(3d) **8.** Nejprve určíme oblast integrace Ω. Vnitřní integrál s pracovní proměnnou y ukazuje na svislé řezy, každý řez se rozkládá mezi křivkami $y = 0$ a $y = x$. Řezy bereme pro všechna $x \geq 0$, obrázek je teď jasný.



Změna pořadí integrace odpovídá přechodu k těm druhým řezům, tedy k vodorovným (viz obrázek napravo). Abychom pokryli celou Ω, musíme uvažovat vodorovné řezy až do nekonečna, jejich pozice jsou tedy dány pomocí y z množiny $\langle 0, \infty)$. Pro zvolené y pak odpovídající řez nechává x probíhat mezi křivkou $x = y$ a nekonečnem. A už je tu integrál.

$$\int_0^\infty \int_y^\infty f(x,y)\,dx\,dy.$$

9. Protože je daná oblast obdélník,

2. Spočtěte za pomoci substituce

   (a) Spočtěte obsah kruhu o poloměru $r > 0$.

   (b) $\int_M e^{-x^2-y^2}\,\mathrm{d}\lambda$, kde $M = \{[x,y] \in \mathbb{R}^2, x \le 0; y \le 0; x^2+y^2 \le 1\}$

   (c) $\int_M x\,\mathrm{d}\lambda$, kde $M = \{[x,y] \in \mathbb{R}^2, x, y \ge 0, 1 \le x^2+y^2 \le 4\}$

   (d) $\int_M (x^2+y^2)\,\mathrm{d}\lambda$, kde $M = \{[x,y] \in \mathbb{R}^2, \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} \le 1\}$

   (e) $\int_M \arctan \frac{y}{x}\,\mathrm{d}\lambda$, kde $M = \{[x,y] \in \mathbb{R}^2, x^2+y^2 \le 1, y \ge 0\}$

   (f) $\int_M \frac{\ln(x^2+y^2)}{x^2+y^2}\,\mathrm{d}\lambda$, kde $M = \{[x,y] \in \mathbb{R}^2, 1 \le x^2+y^2, y \ge 0\}$

   (g) $\int_M \sin\sqrt{x^2+y^2}\,\mathrm{d}\lambda$, kde $M = \{[x,y] \in \mathbb{R}^2, \pi^2 \le x^2+y^2 \le 4\pi^2\}$

3. Změňte pořadí integrace

   (a) $\int_2^3 \int_2^{8-2x} f(x,y)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x$ (b) $\int_0^1 \int_0^{e^y} f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$ (c) $\int_0^\infty \int_0^x f(x,y)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x$

4. Určete, zda jsou integrály ve správném pořadí či nikoli

   (a) ✓ i. $\int_{-4}^{e} \int_1^3 \int_0^2 xyz^2\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x$

   ✓ ii. $\int_0^2 \int_1^3 \int_{-4}^{e} xyz^2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$

   ✓ iii. $\int_1^3 \int_0^2 \int_{-4}^{e} xyz^2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}y$

   (b) ✓ i. $\int_0^3 \int_x^{x^2} \int_y^{y+2} \frac{x}{z}\cos y\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x$

   ✗ ii. $\int_0^3 \int_y^{y+2} \int_x^{x^2} \frac{x}{z}\cos y\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x$

   ✗ iii. $\int_x^{x^2} \int_y^{y+2} \int_0^3 \frac{x}{z}\cos y\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}y$

   ✗ iv. $\int_y^{y+2} \int_x^{x^2} \int_0^3 \frac{x}{z}\cos y\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$

   (c) ✓ i. $\int_0^1 \int_{-\pi}^{\pi} \int_{\cos\alpha}^{3\cos\alpha} \sqrt{z}r^2 \sin\alpha\,\mathrm{d}r\mathrm{d}\alpha\,\mathrm{d}z$

   ✓ ii. $\int_{-\pi}^{\pi} \int_0^1 \int_{\cos\alpha}^{3\cos\alpha} \sqrt{z}r^2 \sin\alpha\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}z\mathrm{d}\alpha$

   ✓ iii. $\int_{-\pi}^{\pi} \int_{\cos\alpha}^{3\cos\alpha} \int_0^1 \sqrt{z}r^2 \sin\alpha\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}r\mathrm{d}\alpha$

   ✗ iv. $\int_0^1 \int_{\cos\alpha}^{3\cos\alpha} \int_{-\pi}^{\pi} \sqrt{z}r^2 \sin\alpha\mathrm{d}\alpha\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}z$

Uvedeme výpočet druhého integrálu (první je zřejmý)

$$\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \sin^2 t \cos t \, dt = \int_{\frac{1}{2}}^{\frac{\sqrt{3}}{2}} w^2 \, dw = \left[\frac{w^3}{3}\right]_{\frac{1}{2}}^{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{8}(3\sqrt{3}-1),$$

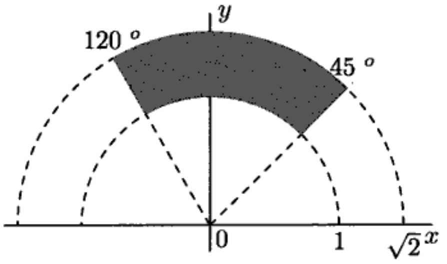
užili jsme substituci $w := \sin t$, a tedy $dw = \cos t \, dt$, $\frac{\pi}{6} \rightsquigarrow \frac{1}{2}$ a $\frac{\pi}{3} \rightsquigarrow \frac{\sqrt{3}}{2}$.

(5a)

Příklad 8.15:
Vypočítejte dvojný integrál

$$\iint_{\Omega} x^2 y \, dxdy ,$$

kde oblast Ω je nakreslena na vedlejším obrázku.



řešení:
Zjistíme vzor oblasti Ω při převodu do polárních souřadnic $\Phi^{-1}(\Omega) = \langle 1, \sqrt{2} \rangle \times \langle \frac{\pi}{4}, \frac{2\pi}{3} \rangle$ a užijeme (*)

$$\iint_{\Omega} x^2 y \, dxdy = \iint_{\langle 1,\sqrt{2}\rangle \times \langle \frac{\pi}{4}, \frac{2\pi}{3}\rangle} r^4 \sin t \cos^2 t \, dr dt = \underbrace{\int_1^{\sqrt{2}} r^4 \, dr}_{=\frac{1}{5}(4\sqrt{2}-1)} \cdot \underbrace{\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{2\pi}{3}} \sin t \cos^2 t \, dt}_{=\frac{1}{24}(2\sqrt{2}+1)} = \frac{1}{120}(15+2\sqrt{2}).$$

Uvedeme výpočet druhého integrálu (první je zřejmý)

$$\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{2\pi}{3}} \sin t \cos^2 t \, dt = \int_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^{-\frac{1}{2}} -w^2 \, dw = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{\sqrt{2}}{2}} w^2 \, dw = \left[\frac{w^3}{3}\right]_{-\frac{1}{2}}^{\frac{\sqrt{2}}{2}} = \frac{1}{24}\left(2\sqrt{2}+1\right),$$

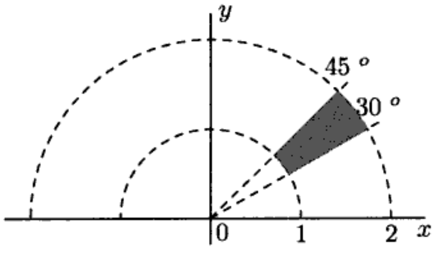
užili jsme substituci $w := \cos t$, a tedy $dw = -\sin t \, dt$, $\frac{\pi}{4} \rightsquigarrow \frac{\sqrt{2}}{2}$ a $\frac{2\pi}{3} \rightsquigarrow -\frac{1}{2}$.

(5b)

Příklad 8.16:
Vypočítejte dvojný integrál

$$\iint_{\Omega} \frac{1}{x^2 y} \, dxdy ,$$

kde oblast Ω je nakreslena na vedlejším obrázku.



řešení:
Zjistíme vzor oblasti Ω při převodu do polárních souřadnic $\Phi^{-1}(\Omega) = \langle 1, 2 \rangle \times \langle \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4} \rangle$ a užijeme (*)

$$\iint_{\Omega} xy \, dxdy = \iint_{\langle 1,2\rangle \times \langle \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4}\rangle} \frac{1}{r^2} \cdot \frac{1}{\sin t \cos^2 t} \, dr dt = \underbrace{\int_1^2 \frac{1}{r^2} \, dr}_{=\frac{1}{2}} \cdot \underbrace{\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin t \, dt}{(1-\cos^2 t)\cos^2 t}}_{=\frac{2}{\sqrt{2}}-\frac{2}{\sqrt{3}}+\ln(2+\sqrt{3})-\ln(1+\sqrt{2})} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{2}\ln(\sqrt{3}+2)(\sqrt{2}-1).$$

Uvedeme výpočet druhého integrálu (první je zřejmý)

$$\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin t \, dt}{(1-\cos^2 t)\cos^2 t} \, dt = \int_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^{\frac{\sqrt{3}}{2}} \frac{dw}{(1-w^2)w^2} = \frac{1}{2}\int_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^{\frac{\sqrt{3}}{2}} \left(\frac{2}{w^2} + \frac{1}{w+1} - \frac{1}{w-1}\right) dw =$$

$$= \left[-\frac{1}{w}\right]_{\frac{\sqrt{3}}{2}}^{\frac{\sqrt{2}}{2}} + \frac{1}{2}\left[\ln\frac{1+w}{1-w}\right]_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{2}{\sqrt{2}} - \frac{2}{\sqrt{3}} + \ln(2+\sqrt{3}) - \ln(1+\sqrt{2}),$$

(volíme kladné u, v), proto vzor množiny Ω při uvedené transformaci bude obdélník $\Phi^{-1}(\Omega) = \langle 1,3\rangle \times \langle \frac{1}{2},1\rangle$. Nyní už stačí dosadit a vypočítat

$$\iint_\Omega \frac{1}{y\sqrt{x}}\,dxdy = \iint_{\langle 1,3\rangle\times\langle\frac12,1\rangle} \frac{1}{\frac{u}{v}\sqrt{uv}}\cdot\frac{2u}{v}\,dudv =$$

$$= 2\iint_{\langle 1,3\rangle\times\langle\frac12,1\rangle} \frac{dudv}{\sqrt{uv}} = 2\int_1^3 \frac{du}{\sqrt{u}}\cdot\int_{\frac12}^1 \frac{dv}{\sqrt{v}} = 8\left[\sqrt{u}\right]_1^3\cdot\left[\sqrt{v}\right]_{\frac12}^1 = 8\left(\sqrt{3}-1\right)\left(1-\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = 4\sqrt{2}(\sqrt{3}-1)(\sqrt{2}-1)\,.$$

V dalších příkladech budeme užívat větu o substituci pro polární souřadnice

$$\Phi:\quad \begin{array}{l} x = r\cos t \\ y = r\sin t \end{array}\,.$$

Protože

$$|\det D\Phi| = \left|\det\begin{pmatrix}\cos t & \sin t\\ -r\sin t & r\cos t\end{pmatrix}\right| = \left|r\cos^2 t + r\sin^2 t\right| = r\,,$$

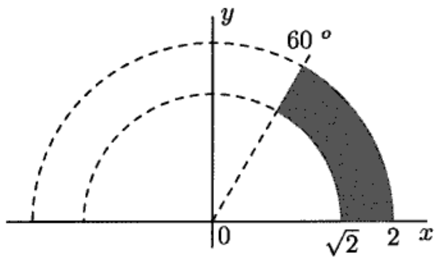
dostaneme

$$\iint_\Omega f(x,y)\,dx\,dy = \iint_{\Phi^{-1}(\Omega)} f(r\cos t, r\sin t)\cdot r\,du\,dv\,. \qquad (*)$$

Příklad 8.6:
Vypočítejte dvojný integrál

$$\iint_\Omega \frac{y}{x}\,dxdy\,,$$

kde oblast Ω je nakreslena na vedlejším obrázku.



řešení:
Zjistíme vzor oblasti Ω při převodu do polárních souřadnic $\Phi^{-1}(\Omega) = \langle\sqrt{2},2\rangle \times \langle 0,\frac{\pi}{3}\rangle$ a užijeme $(*)$

$$\iint_\Omega \frac{y}{x}\,dxdy = \iint_{\langle\sqrt2,2\rangle\times\langle 0,\frac{\pi}{3}\rangle} r\,\frac{\sin t}{\cos t}\,drdt = \underbrace{\int_{\sqrt2}^2 r\,dr}_{=1}\cdot\underbrace{\int_0^{\frac{\pi}{3}}\frac{\sin t}{\cos t}\,dt}_{=\ln 2} = \ln 2\,.$$

Uvedeme výpočty jednotlivých integrálů

$$\int_{\sqrt2}^2 r\,dr = \left[\frac{r^2}{2}\right]_{\sqrt2}^2 = 2-1 = 1\,,$$

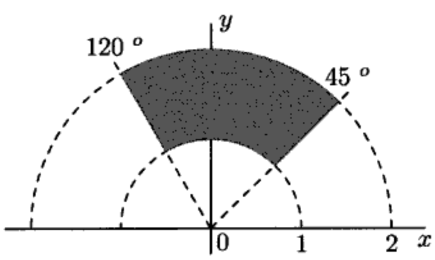
$$\int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{\sin t}{\cos t}\,dt = \int_1^{\frac12} -\frac{dw}{w} = \int_{\frac12}^1 \frac{dw}{w} = \left[\ln|w|\right]_{\frac12}^1 = \ln 2\,,$$

užili jsme substituci $w := \cos t$, a tedy $dw = -\sin t\,dt$, $0 \rightsquigarrow 1$ a $\frac{\pi}{3} \rightsquigarrow \frac{1}{2}$.

Příklad 8.7:
Vypočítejte dvojný integrál

$$\iint_\Omega x^2 y\,dxdy\,,$$

kde oblast Ω je nakreslena na vedlejším obrázku.



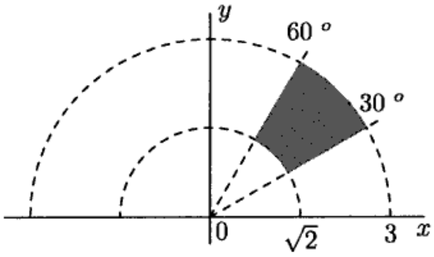
řešení:
Zjistíme vzor oblasti Ω při převodu do polárních souřadnic $\Phi^{-1}(\Omega) = \langle 1,2\rangle \times \langle\frac{\pi}{4},\frac{2\pi}{3}\rangle$ a užijeme $(*)$

$$\iint_\Omega x^2 y\,dxdy = \iint_{\langle 1,2\rangle\times\langle\frac{\pi}{4},\frac{2\pi}{3}\rangle} r^4\,\sin t\cos^2 t\,drdt = \underbrace{\int_1^2 r^4\,dr}_{=\frac{31}{5}}\cdot\underbrace{\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{2\pi}{3}}\sin t\cos^2 t\,dt}_{=\frac{1}{24}(2\sqrt2+1)} = \frac{31}{120}\left(2\sqrt{2}+1\right)\,.$$

Příklad 8.10:
Vypočítejte dvojný integrál

$$\iint_\Omega \frac{y}{x^2}\, dxdy\,,$$

kde oblast Ω je nakreslena na vedlejším obrázku.



řešení:
Zjistíme vzor oblasti Ω při převodu do polárních souřadnic $\Phi^{-1}(\Omega) = \langle\sqrt{2}, 3\rangle \times \langle\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3}\rangle$ a užijeme (*)

$$\iint_\Omega \frac{y}{x^2}\, dxdy = \iint_{\langle\sqrt{2},3\rangle\times\langle\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{3}\rangle} \frac{\sin t}{\cos^2 t}\, drdt = \underbrace{\int_{\sqrt{2}}^{3} 1\, dr}_{=3-\sqrt{2}} \cdot \underbrace{\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{\sin t}{\cos^2 t}\, dt}_{=\frac{2}{\sqrt{3}}(\sqrt{3}-1)} = \frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{3}}(3-\sqrt{2})(\sqrt{3}-1)\,.$$

Uvedeme výpočet druhého integrálu (první je zřejmý)

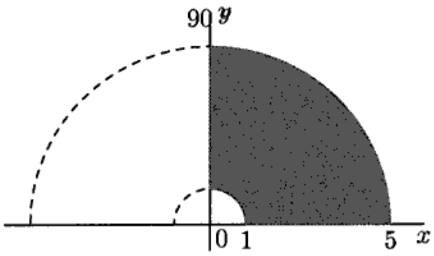
$$\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{\sin t}{\cos^2 t}\, dt = \int_{\frac{1}{2}}^{\frac{\sqrt{3}}{2}} \frac{dw}{w^2} = \left[-\frac{1}{w}\right]_{\frac{1}{2}}^{\frac{\sqrt{3}}{2}} = -\frac{2}{\sqrt{3}} + 2 = \frac{2}{\sqrt{3}}\left(\sqrt{3}-1\right),$$

užili jsme substituci $w := \cos t$, a tedy $\quad dw = -\sin t\, dt\,, \quad \frac{\pi}{6} \rightsquigarrow \frac{\sqrt{3}}{2}$ a $\frac{\pi}{3} \rightsquigarrow \frac{1}{2}$.

Příklad 8.11:
5d
Vypočítejte dvojný integrál

$$\iint_\Omega \frac{x}{x^2+2y^2}\, dxdy\,,$$

kde oblast Ω je nakreslena na vedlejším obrázku.



řešení:
Zjistíme vzor oblasti Ω při převodu do polárních souřadnic $\Phi^{-1}(\Omega) = \langle 1, 5\rangle \times \langle 0, \frac{\pi}{2}\rangle$ a užijeme (*)

$$\iint_\Omega \frac{x}{x^2+2y^2}\, dxdy = \iint_{\langle 1,5\rangle\times\langle 0,\frac{\pi}{2}\rangle} \frac{r\cos t}{r^2\cos^2 t + 2r^2\sin^2 t}\, r\, drdt = \underbrace{\int_1^5 1\, dr}_{=4} \cdot \underbrace{\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos t}{1+\sin^2 t}\, dt}_{=\frac{\pi}{4}} = \pi\,.$$

Uvedeme výpočet druhého integrálu (první je zřejmý)

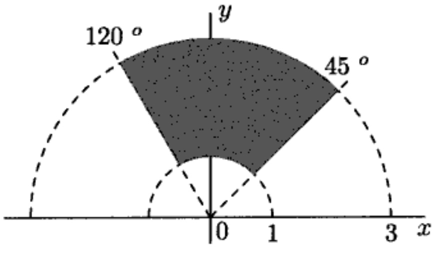
$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos t}{1+\sin^2 t}\, dt = \int_0^1 \frac{1}{1+w^2}\, dw = [\operatorname{arctg} w]_0^1 = \frac{\pi}{4},$$

užili jsme substituci $w := \sin t$, a tedy $\quad dw = \cos t\, dt\,, \quad 0 \rightsquigarrow 0$ a $\frac{\pi}{2} \rightsquigarrow 1$.

Příklad 8.12:
Vypočítejte dvojný integrál

$$\iint_\Omega xy\, dxdy\,,$$

kde oblast Ω je nakreslena na vedlejším obrázku.



řešení:
Zjistíme vzor oblasti Ω při převodu do polárních souřadnic $\Phi^{-1}(\Omega) = \langle 1, 3\rangle \times \langle\frac{\pi}{4}, \frac{2\pi}{3}\rangle$ a užijeme (*)

$$\iint_\Omega xy\, dxdy = \iint_{\langle 1,3\rangle\times\langle\frac{\pi}{4},\frac{2\pi}{3}\rangle} r^3 \sin t\cos t\, drdt = \underbrace{\int_1^3 r^3\, dr}_{=\left[\frac{r^4}{4}\right]_1^3=20} \cdot \underbrace{\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{2\pi}{3}} \sin t\cos t\, dt}_{=\frac{1}{8}} = \frac{5}{2}\,.$$

8. Dvojný a trojný integrál

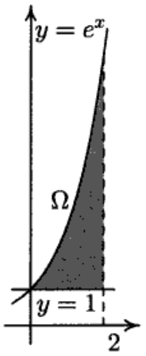
Při výpočtech vícenásobných integrálů budeme užívat zejména Fubiniovu větu (viz [1], [2], [3], [7]).

(6a) **Příklad 8.1:**
Vypočítejte dvojný integrál

$$\iint_\Omega \left(x+\frac{1}{\sqrt{y}}\right) dxdy\,,$$

kde oblast $\Omega = \{[x,y];\ x \le 2,\ 1 \le y \le e^x\}$.

řešení:
Nakreslíme si oblast Ω a užijeme Fubiniovu větu.



$$\iint_\Omega \left(x+\frac{1}{\sqrt{y}}\right) dxdy = \int_0^2 \underbrace{\left(\int_1^{e^x}\left(x+\frac{1}{\sqrt{y}}\right) dy\right)}_{=\left[xy+2\sqrt{y}\right]_{y:=1}^{y:=e^x}=xe^x+2\sqrt{e^x}-x-2} dy =$$

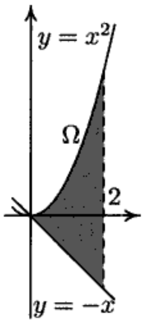
$$= \int_0^2 \left(xe^x + 2e^{\frac{x}{2}} - x - 2\right) dx = \left[(x-1)e^x + 4e^{\frac{x}{2}} - \frac{1}{2}x^2 - 2x\right]_0^2 = e^2+4e-9\,.$$

(6b) **Příklad 8.2:**
Vypočítejte dvojný integrál

$$\iint_\Omega xy^2\, dxdy\,,$$

kde oblast $\Omega = \{[x,y];\ 0 \le x \le 2,\ -x \le y \le x^2\}$.

řešení:
Nakreslíme si oblast Ω a užijeme Fubiniovu větu.



$$\iint_\Omega xy^2\, dxdy = \int_0^2 \underbrace{\left(\int_{-x}^{x^2} xy^2\, dy\right)}_{=\left[x\cdot\frac{y^3}{3}\right]_{y:=-x}^{y:=x^2}=\frac{1}{3}(x^7+x^4)} dx =$$

$$= \frac{1}{3}\int_0^2 \left(x^7+x^4\right) dx = \frac{1}{3}\left[\frac{x^8}{8}+\frac{x^5}{5}\right]_0^2 = \frac{64}{5} = 12,8\,.$$

Poznamenejme, že Fubiniovu větu by bylo možné použít i v opačném pořadí integrace (přičemž oblast Ω rozdělíme na dvě části)

$$\iint_\Omega xy^2\, dxdy = \int_0^4 \left(\int_{\sqrt{y}}^2 xy^2\, dx\right) dx + \int_{-2}^0 \left(\int_{-y}^2 xy^2\, dx\right) dx\,.$$

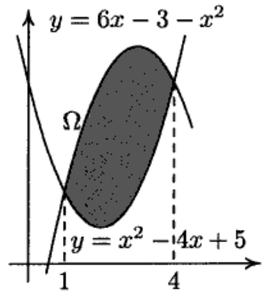
(6c) **Příklad 8.3:**
Vypočítejte dvojný integrál

$$\iint_\Omega \frac{1}{x}\, dxdy\,,$$

kde oblast $\Omega = \{[x,y];\ x^2-4x+5 \le y \le 6x-3-x^2\}$.

řešení:
Nakreslíme si oblast Ω. Potřebujeme zjistit průsečíky funkcí $y = x^2-4x+5$ a $y = 6x-3-x^2$, což vede na rovnici

$$x^2-4x+5 = 6x-3-x^2 \qquad x^2-5x+4=0 \quad \text{s kořeny} \quad 1 \text{ a } 4\,.$$

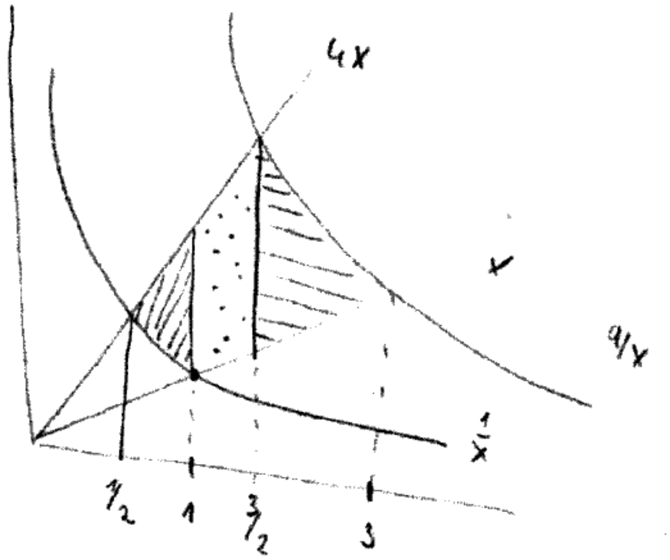


K výpočtu použijeme opět Fubiniovu větu

$$\iint_\Omega \frac{1}{x}\, dxdy = \int_1^4 \left(\int_{x^2-4x+5}^{-x^2+6x-3} \frac{1}{x}\, dy\right) dx =$$

$$= \int_1^4 \left(-2x+10-\frac{8}{x}\right) dx = \left[-x^2+10x-8\ln x\right]_1^4 = 15-16\ln 2\,.$$

(6d)



- $\frac{1}{x} = 4x \qquad x = \frac{1}{2}$
- $\frac{1}{x} = x \qquad x = 1$
- $\frac{9}{x} = 4x \qquad x = \frac{3}{2}$
- $\frac{9}{x} = x \qquad x = 3$

$$\int_{1/2}^{1} \int_{1/x}^{4x} dy\,dx + \int_{1}^{3/2} \int_{x}^{4x} dy\,dx + \int_{3/2}^{3} \int_{x}^{9/x} dy\,dx$$