8. cvičení – 2D integrál

https://www2.karlin.mff.cuni.cz/~kuncova/vyuka.php, kuncova@karlin.mff.cuni.cz

Teorie

Věta 1 (Fubiniova)**.** Nechť $n, m \in \mathbb{N}$, $E \subseteq \mathbb{R}^{n+m}$ je lebegueovsky měřitelná množina a $f : E \to \mathbb{R}$ je lebegueovsky měřitelná funkce. Předpokládejme, že integrál

$$\int_E f(x,y)\,\mathrm{d}\lambda^{n+m}$$

má smysl. Pak všechny integrály níže mají smysl a platí

$$\int_E f\,\mathrm{d}\lambda^{n+m} = \int_{\mathbb{R}^n} \left(\int_{E^{x,*}} f(x,y)\,\mathrm{d}\lambda^m(y) \right) \mathrm{d}\lambda^n(x) = \int_{\mathbb{R}^m} \left(\int_{E^{*,y}} f(x,y)\,\mathrm{d}\lambda^n(x) \right) \mathrm{d}\lambda^m(y).$$

Věta 2 (o substituci)**.** *Nechť $G \subset \mathbb{R}^n$ je otevřená množina a $\varphi : G \to \mathbb{R}^n$ je prosté regulární zobrazení. Nechť u je funkce na $M \subset \varphi(G)$. Potom*

$$\int_M u(x)\,dx = \int_{\varphi^{-1}(M)} u(\varphi(t))|J\varphi(t)|\,dt,$$

pokud alespoň jedna strana má smysl.

Algoritmus

1. Nakreslíme množinu.
2. Určíme meze, případně aplikujeme polární souřadnice.
3. Nezapomeneme na Jakobián a spočteme.

Hint

$$\int \sin^2 t\,\mathrm{d}t = \frac{t}{2} - \frac{1}{2}\sin t\cos t \qquad \int \cos^2 t\,\mathrm{d}t = \frac{t}{2} + \frac{1}{2}\sin t\cos t \qquad \int t\sin t\,\mathrm{d}t = \sin t - t\cos t$$

Příklady

Zdroje příkladů a řešení:

http://mat.fsv.cvut.cz/Sibrava/Vyuka/vic_int.pdf
https://math.fme.vutbr.cz/download.aspx?id_file=602492416
https://fix.prf.jcu.cz/~eisner/lock/UMB-566-materialy/matematika-sbirka-III-Krivkovy_integral.pdf
https://homel.vsb.cz/~bou10/archiv/ip2.pdf
https://is.muni.cz/el/1433/jaro2009/MB102/7448541/skripta4.pdf
https://math.fel.cvut.cz/en/people/habala/teaching/veci-ma2/ma2r4.pdf
http://www.matematika-lucerna.cz/matalyza/resene-matika3.pdf

1. Vypočítejte dvojný integrál přes množinu M

   (a) $\displaystyle\int_M x \sin y \,\mathrm{d}\lambda$, kde $M = [1,2] \times [0, \frac{\pi}{2}]$

   (b) $\displaystyle\int_M x^y \,\mathrm{d}\lambda$, kde $M = [0,1] \times [1,2]$

   (c) $\displaystyle\int_M y \,\mathrm{d}\lambda$, kde M je určena vztahy $x^2 - y + 2 = 0$ a $x + y - 4 = 0$.

   (d) $\displaystyle\int_M \frac{x}{y^2} \,\mathrm{d}\lambda$, kde M je určena vztahy $1 \le x \le y \le 3$.

   (e) $\displaystyle\int_M e^{x/y} \,\mathrm{d}\lambda$, kde M je určena vztahy $x = 0$, $y = 1$, $y = 2$ a $y^2 = x$

   (f) $\displaystyle\int_M xy^2 \,\mathrm{d}\lambda$ M je určena vztahy $x^2 + y^2 - 1 \le 0$ a $x + y - 1 \ge 0$.

   (g) $\displaystyle\int_M 1 \,\mathrm{d}\lambda$, kde M je určena vztahy $x + y = 4$, $x + y = 12$ a $y^2 = 2x$.

2. Spočtěte za pomoci substituce

   (a) Spočtěte obsah kruhu o poloměru $r > 0$.

   (b) $\displaystyle\int_M e^{-x^2-y^2} \,\mathrm{d}\lambda$, kde $M = \{[x,y] \in \mathbb{R}^2, x \le 0; y \le 0; x^2 + y^2 \le 1\}$

   (c) $\displaystyle\int_M x \,\mathrm{d}\lambda$, kde $M = \{[x,y] \in \mathbb{R}^2, x, y \ge 0, 1 \le x^2 + y^2 \le 4\}$

   (d) $\displaystyle\int_M (x^2 + y^2) \,\mathrm{d}\lambda$, kde $M = \{[x,y] \in \mathbb{R}^2, \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} \le 1\}$

   (e) $\displaystyle\int_M \arctan \frac{y}{x} \,\mathrm{d}\lambda$, kde $M = \{[x,y] \in \mathbb{R}^2, x^2 + y^2 \le 1, y \ge 0\}$

   (f) $\displaystyle\int_M \frac{\ln(x^2 + y^2)}{x^2 + y^2} \,\mathrm{d}\lambda$, kde $M = \{[x,y] \in \mathbb{R}^2, 1 \le x^2 + y^2, y \ge 0\}$

   (g) $\displaystyle\int_M \sin \sqrt{x^2 + y^2} \,\mathrm{d}\lambda$, kde $M = \{[x,y] \in \mathbb{R}^2, \pi^2 \le x^2 + y^2 \le 4\pi^2\}$

3. Změňte pořadí integrace

   (a) $\displaystyle\int_2^3 \int_2^{8-2x} f(x,y) \,\mathrm{d}y \,\mathrm{d}x$ (b) $\displaystyle\int_0^1 \int_0^{e^y} f(x,y) \,\mathrm{d}x \,\mathrm{d}y$ (c) $\displaystyle\int_0^\infty \int_0^x f(x,y) \,\mathrm{d}y \,\mathrm{d}x$

4. Určete, zda jsou integrály ve správném pořadí či nikoli

(a)
i. $\displaystyle\int_{-4}^{e}\int_{1}^{3}\int_{0}^{2} xyz^2\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x$

ii. $\displaystyle\int_{0}^{2}\int_{1}^{3}\int_{-4}^{e} xyz^2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$

iii. $\displaystyle\int_{1}^{3}\int_{0}^{2}\int_{-4}^{e} xyz^2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}y$

(b)
i. $\displaystyle\int_{0}^{3}\int_{x}^{x^2}\int_{y}^{y+2} \frac{x}{z}\cos y\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x$

ii. $\displaystyle\int_{0}^{3}\int_{y}^{y+2}\int_{x}^{x^2} \frac{x}{z}\cos y\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x$

iii. $\displaystyle\int_{x}^{x^2}\int_{y}^{y+2}\int_{0}^{3} \frac{x}{z}\cos y\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}y$

iv. $\displaystyle\int_{y}^{y+2}\int_{x}^{x^2}\int_{0}^{3} \frac{x}{z}\cos y\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$

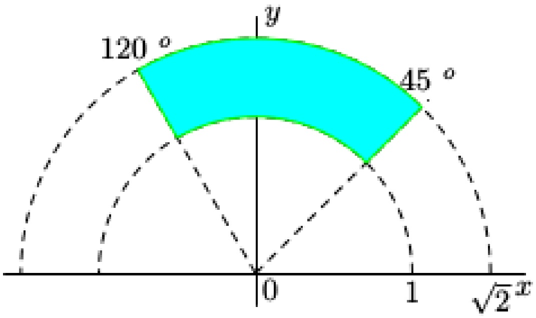
(c)
i. $\displaystyle\int_{0}^{1}\int_{-\pi}^{\pi}\int_{\cos\alpha}^{3\cos\alpha} \sqrt{z}r^2\sin\alpha\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\alpha\,\mathrm{d}z$

ii. $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi}\int_{0}^{1}\int_{\cos\alpha}^{3\cos\alpha} \sqrt{z}r^2\sin\alpha\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}\alpha$

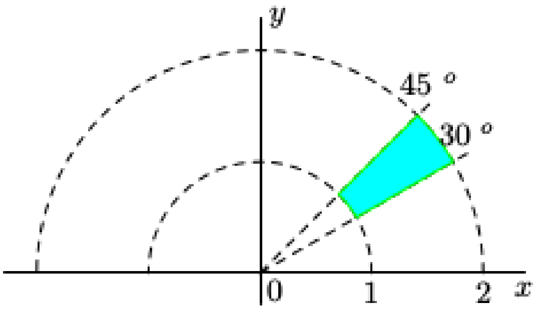
iii. $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi}\int_{\cos\alpha}^{3\cos\alpha}\int_{0}^{1} \sqrt{z}r^2\sin\alpha\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\alpha$

iv. $\displaystyle\int_{0}^{1}\int_{\cos\alpha}^{3\cos\alpha}\int_{-\pi}^{\pi} \sqrt{z}r^2\sin\alpha\,\mathrm{d}\alpha\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}z$

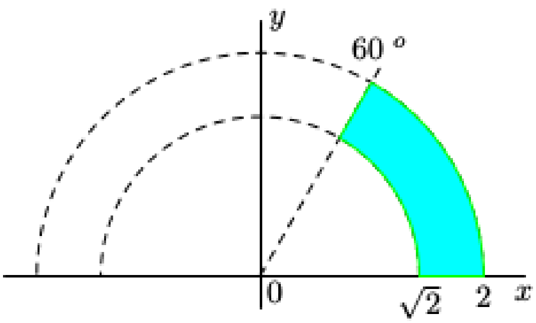
5. Zapište následující množiny polárními souřadnicemi



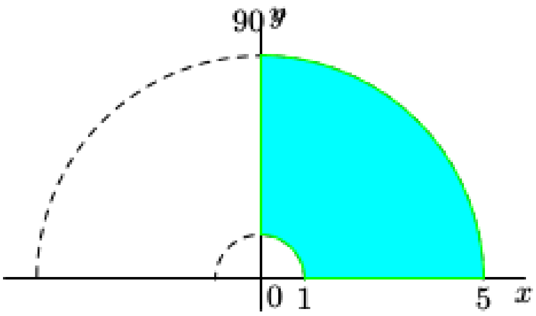
(a)



(b)



(c)



(d)

6. Sestavte (nepočítejte) integrály z funkce $f(x, y) = \sin^2 x \cos xy^3$ přes množiny

   (a) $M = \{[x, y]; x \leq 2; 1 \leq y \leq e^x\}$
   (b) $M = \{[x, y]; 0 \leq x \leq 2; -x \leq y \leq x^2\}$
   (c) $M = \{[x, y]; x^2 - 4x + 5 \leq y \leq 6x - 3 - x^2\}$
   (d) M na obrázku

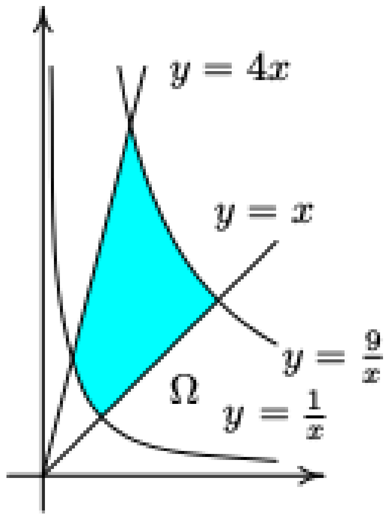


Figure 1: https://mathjokes4mathyfolks.wordpress.com/2012/10/31/scary-math-facts-for-halloween/