# 7. cvičení – Konvergence Lebesgueova integrálu

https://www2.karlin.mff.cuni.cz/~kuncova/vyuka.php, kuncova@karlin.mff.cuni.cz

## Příklady

1. Vyšetřete **absolutní** konvergenci integrálů ($\alpha, a, b, p, q \in \mathbb{R}$):

   (a) $\displaystyle\int_0^1 \frac{\tan x}{\sqrt{x^3}}\,\mathrm{d}x$

   **Řešení:** Funkce je spojitá na $(0, 1]$, u 0 limitně srovnáme s $g(x) = \frac{x}{x^{3/2}} = \frac{1}{\sqrt{x}}$ Máme

   $$\lim_{x\to 0+} \frac{\frac{\tan x}{\sqrt{x^3}}}{\frac{x}{\sqrt{x^3}}} = 1 \in (0, \infty).$$

   Protože integrál $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}$ konverguje, tak z LSK konverguje i zadaný integrál.

   (b) $\displaystyle\int_1^2 \frac{e^x}{x^2-1}\,\mathrm{d}x$

   **Řešení:**

   $$\frac{e^x}{x^2-1} = \frac{e^x}{(x-1)(x+1)}$$

   U 1 použijeme LSK s funkcí $g(x) = \frac{1}{x-1}$.

   $$\lim_{x\to 1+} \frac{\frac{e^x}{(x-1)(x+1)}}{\frac{1}{x-1}} = \frac{e}{2}$$

   Protože $\int_1^2 \frac{1}{x-1} = \infty$ (lze přímo upočítat), z LSK plyne i divergence $\int_1^2 f(x)$.

   (c) $\displaystyle\int_0^\infty x^{-3/4} e^{-\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x$

   **Řešení:** Provedeme substituci $y = \sqrt{x},\ \mathrm{d}y = \frac{1}{2\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x$:

   $$\int_1^\infty x^{-3/4} e^{-\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x = 2\int_1^\infty y^{-1/2} e^{-y}\,\mathrm{d}y$$

   Na intervalu $(0, \infty)$ je funkce spojitá a nezáporná. Roztrhneme na integrály $\int_0^1 + \int_1^\infty$.
   U 0: srovnáme s funkcí $g(y) = \frac{1}{\sqrt{y}}$.

   $$\lim_{y\to 0+} \frac{\frac{1}{e^y\sqrt{y}}}{\frac{1}{\sqrt{y}}} = \lim_{y\to 0+} \frac{1}{e^y} = 1 \in (0, \infty)$$

   Protože $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{y}}\,\mathrm{d}y$ konverguje (lze spočítat), konverguje z LSK i $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{y}e^y}$.
   U $\infty$: Použijeme SK, pro $y \geq 1$ máme

   $$\frac{1}{\sqrt{y}e^y} \leq \frac{1}{e^y}.$$

   Protože $\int_1^\infty e^{-y}\,\mathrm{d}y$ konverguje, tak ze SK konverguje i $\int_1^\infty \frac{1}{\sqrt{y}e^y}$.
   Závěr: původní integrál Konverguje.

(d) $\displaystyle\int_0^1 x^{-\ln x}\,\mathrm{d}x$

**Řešení:** Máme
$$\int_0^1 x^{-\ln x}\,\mathrm{d}x = \int_0^1 e^{-\ln^2 x}\,\mathrm{d}x.$$
Funkce je spojitá na $(0,1]$ a platí
$$\lim_{x\to 0+} e^{-\ln^2 x} = 0.$$
Funkci lze tedy spojitě rozšířit na (omezený) interval $[0,1]$ a tedy integrál konverguje.

(e) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\arctan px}{x^n}\,\mathrm{d}x$

**Řešení:**

- $p = 0$, pak $f \equiv 0$ a integrál konverguje.
- $p > 0$, pak u 0 LSK s $g(x) = \frac{px}{x^n}$.
$$\lim_{x\to 0+} \frac{\frac{\arctan px}{x^n}}{\frac{px}{x^n}} = 1,$$
tedy $\int_0^1 f(x)$ konverguje $\Leftrightarrow$ $\int_0^1 px^{1-n}$ konverguje $\Leftrightarrow$ $1-n > -1 \Leftrightarrow 2 > n$.
U $\infty$ LSK s $g(x) = \frac{\frac{\pi}{2}}{x^n}$:
$$\lim_{x\to\infty} \frac{\frac{\arctan px}{x^n}}{\frac{\frac{\pi}{2}}{x^n}} = 1.$$
Tedy $\int_1^\infty f(x)$ konverguje $\Leftrightarrow$ $\int_1^\infty x^{-n}$ konverguje $\Leftrightarrow n < 1$.

Dohromady $\int_0^\infty f(x)$ konverguje pro $p = 0$ a $n \in \mathbb{N}$. Jinak diverguje.

(f) $\displaystyle\int_0^\pi \frac{\ln(\sin x)}{x\sqrt{\sin x}}\,\mathrm{d}x$

**Řešení:** Funkce je spojitá na $(0,\pi)$. Problematické body: 0 a $\pi$.
U 0: srovnáme s $g(x) = \frac{|\ln x|}{\sqrt{x^3}}$.
$$\lim_{x\to 0+} \frac{\left|\frac{\ln(\sin x)}{x\sqrt{\sin x}}\right|}{\frac{|\ln x|}{\sqrt{x^3}}} = 1.$$
Protože $\int_0^{\frac{\pi}{2}} |\ln x| x^{-3/2} = \infty$ (z tabulky nebo odvodíme), tak u 0 diverguje i náš původní integrál. U $\pi$ tedy už nemusíme vyšetřovat.
Závěr: diverguje.

(g) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{x - \sin x}{x^p}\,\mathrm{d}x$

**Řešení:** Funkce spojitá na $(0,\infty)$. U 0 srovnáme s $g(x) = \frac{x^3}{x^p}$ (uhodneme z Taylorova rozvoje funkce $x - \sin x$).
$$\lim_{x\to 0+} \frac{\frac{x-\sin x}{x^p}}{\frac{x^3}{x^p}} = \frac{1}{6} \in (0,\infty).$$

Tedy $\int_0^1 \frac{x-\sin x}{x^p}$ z LSK konverguje právě tehdy, když konverguje $\int_0^1 x^{3-p}$. Tedy právě tehdy, když $3-p>-1 \Leftrightarrow p<4$.

U $\infty$: srovnáme s funkcí $g(x)=\frac{x}{x^p}$.

$$\lim_{x\to 0+} \frac{\frac{x-\sin x}{x^p}}{\frac{x}{x^p}} = \lim_{x\to 0+} 1-\frac{\sin x}{x} = 1-0$$

Z LSK tedy konverguje právě tehdy, když $\int_1^\infty x^{1-p}$ konverguje, což je $\Leftrightarrow 1-p<-1$ $\Leftrightarrow 2<p$.

Závěr: Integrál konverguje $\Leftrightarrow 2<p<4$.

(h) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^p x \cos^q x \,\mathrm{d}x$

**Řešení:** U 0 srovnáme s $g(x)=x^p$:

$$\lim_{x\to 0+} \frac{\sin^p x\cos^q x}{x^p} = 1,$$

tedy $\int_0^{\frac{\pi}{4}} f(x)$ konverguje $\Leftrightarrow \int_0^{\frac{\pi}{4}} x^p$ konverguje $\Leftrightarrow p>-1$.

U $\frac{\pi}{2}$ LSK s $g(x)=(\frac{\pi}{2}-x)^q$.

$$\lim_{x\to \frac{\pi}{2}-} \frac{\sin^p x\cos^q x}{(\frac{\pi}{2}-x)^q} = 1,$$

tedy $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} f(x)$ konverguje $\Leftrightarrow \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} (\frac{\pi}{2}-x)^q$ konverguje. Lze upočítat nebo substituovat a vyjde, že integrál konverguje $\Leftrightarrow q>-1$.

Závěr: $\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)$ konverguje $\Leftrightarrow (p>-1 \land q>-1)$.

(i) $\displaystyle\int_1^\infty \sin^2 \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x$

**Řešení:** U $\infty$: LSK s $g(x)=\frac{1}{x^2}$.

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\sin^2\frac{1}{x}}{\frac{1}{x^2}} = 1.$$

Protože $\int_1^\infty x^{-2}$ konverguje, konverguje i $\int_1^\infty f(x)$.

(j) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\sin\frac{1}{x}\arctan x}{x}\,\mathrm{d}x$

**Řešení:** Funkce je spojitá na $(0,\infty)$.

U 0: srovnáme s $g(x)=\frac{x\sin\frac{1}{x}}{x}=\sin\frac{1}{x}$

$$\lim_{x\to 0+} \frac{\frac{\sin\frac{1}{x}\arctan x}{x}}{\frac{x\sin\frac{1}{x}}{x}} = 1 \in (0,\infty).$$

Navíc $\int_0^1 \sin\frac{1}{x}$ konverguje, protože $|\sin\frac{1}{x}|\le 1$ a integrál omezené a spojité funkce (na $[0,1]$) konverguje.

U $\infty$: $\frac{1}{x} \to 0+$, tedy $\sin \frac{1}{x}$ „se chová jako" sin u 0. Budeme tedy srovnávat s funkcí $g(x) = \frac{\frac{1}{x} \cdot \frac{\pi}{2}}{x} = \frac{\pi}{2x^2}$. LSK:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\frac{\sin \frac{1}{x} \arctan x}{x}}{\frac{\frac{1}{x} \cdot \frac{\pi}{2}}{x}} = 1.$$

Protože $\int_1^\infty \frac{1}{x^2}$ konverguje, konverguje i $\int_1^\infty \frac{\sin \frac{1}{x} \arctan x}{x} \, \mathrm{d}x$.
Závěr: původní integrál konverguje.

(k) $\displaystyle\int_0^\pi \frac{\sin\left(\frac{1}{\cos x}\right)}{\sqrt{x}} \, \mathrm{d}x$

**Řešení:** Ze SK:

$$\left| \frac{\sin \frac{1}{\cos x}}{\sqrt{x}} \right| \leq \frac{1}{\sqrt{x}}$$

Protože $\int_0^\pi \frac{1}{\sqrt{x}}$ konverguje, konverguje i náš integrál.

(l) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{1}{\sqrt{x} \log(1 + e^x)} \, \mathrm{d}x$

**Řešení:** U 0: LSK s $g(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$:

$$\lim_{x\to 0+} \frac{\frac{1}{\sqrt{x}\log(1+e^x)}}{\frac{1}{\sqrt{x}}} = \frac{1}{\log 2} \in (0, \infty).$$

Protože $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}$ konverguje, tak z LSK konverguje i $\int_0^1 f(x)$.
U $\infty$: funkce $1 + e^x$ „se chová jako" $e^x$, tedy LSK s $g(x) = \frac{1}{\sqrt{x}\log(e^x)} = x^{-3/2}$.

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to\infty} \frac{\frac{1}{\sqrt{x}\log(1+e^x)}}{\frac{1}{x\sqrt{x}}} &= \lim_{x\to\infty} \frac{x}{\log(1 + e^x)} = \lim_{x\to\infty} \frac{x}{\log e^x(e^{-x} + 1)} \\
&= \lim_{x\to\infty} \frac{x}{x + \log(e^{-x} + 1)} = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{1 + \frac{\log(e^{-x}+1)}{x}} = 1
\end{aligned}$$

Navíc integrál $\int_1^\infty x^{-3/2}$ konverguje, tedy z LSK konverguje i $\int_1^\infty f(x)$.
Závěr: $\int_0^\infty f(x)$ konverguje.

(m) $\displaystyle\int_0^\infty \sin\left(\sqrt{x^{2\alpha} + 1} - x^\alpha\right) \mathrm{d}x$

**Řešení:** U $\infty$: upravíme odmocniny:

$$\sqrt{x^{2\alpha} + 1} - x^\alpha = \frac{1}{\sqrt{x^{2\alpha} + 1} + x^\alpha}$$

Pro $\alpha > 0$ srovnáme s $g(x) = \frac{1}{x^\alpha}$.

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\sin \frac{1}{\sqrt{x^{2\alpha}+1}+x^\alpha}}{\frac{1}{x^\alpha}} = \lim_{x\to\infty} \frac{\sin \frac{1}{\sqrt{x^{2\alpha}+1}+x^\alpha}}{\frac{1}{\sqrt{x^{2\alpha}+1}+x^\alpha}} \cdot \frac{\frac{1}{\sqrt{x^{2\alpha}+1}+x^\alpha}}{\frac{1}{x^\alpha}} = \frac{1}{2}$$

Tedy z LSK $\int_1^\infty f(x)$ konverguje právě tehdy, když $\alpha > 1$.
Pro $\alpha \leq 0$ srovnáme s $g(x) = 1$.

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\sin\left(\sqrt{x^{2\alpha}+1} - x^\alpha\right)}{1} = \begin{cases} \sin 1, & \alpha < 0, \\ \sin 3, & \alpha = 0. \end{cases}$$

Z LSK tedy $\int_1^\infty f(x)$ pro $\alpha \leq 0$ diverguje.
U 0 stačí uvažovat $\alpha > 1$. Ale pro takové $\alpha$ je $f(x)$ spojitá na $[0,1]$, tedy integrál konverguje.
Závěr: $\int_0^\infty f(x)$ konverguje $\Leftrightarrow \alpha > 1$.

2. Vyšetřete **absolutní** konvergenci integrálů ($\alpha, a, b, p, q \in \mathbb{R}$):

(a) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{1}{\sqrt[3]{x^3+1}}\,\mathrm{d}x$ D

**Řešení:**
Na intervalu $[1,\infty)$ srovnáme s funkci $\frac{1}{x}$.

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\frac{1}{\sqrt[3]{x^3+1}}}{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to\infty} \frac{x}{\sqrt[3]{x^3+1}} = 1 \in (0,\infty).$$

Protože $\int_1^\infty \frac{1}{x}$ diverguje, diverguje i $\int_1^\infty f$.

(b) $\displaystyle\int_0^1 \frac{\ln(1+x^2)}{1+x^2}\,\mathrm{d}x$ K

**Řešení:** Konverguje, protože jde o spojitou funkci na uzavřeném omezeném intervalu.

(c) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{x}{x^3+1}\,\mathrm{d}x$ K

**Řešení:** Na intervalu $[0,1]$ jde o spojitou funkci na omezeném a uzavřeném intervalu, tedy konverguje.
Na $[1,\infty)$ užijeme LSK s $\frac{1}{x^2}$.

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\frac{x}{x^3+1}}{\frac{1}{x^2}} = 1 \in (0,\infty).$$

Protože $\int_1^\infty \frac{1}{x^2}$ konverguje, konverguje i původní integrál.

(d) $\displaystyle\int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}\,\mathrm{d}x$

**Řešení:**

i. $\int_0^{\frac{1}{2}} x^{p-1}(1-x)^{q-1}\,\mathrm{d}x$
Budeme srovnávat LSK s $x^{p-1} \cdot 1$:

$$\lim_{x\to 0} \frac{x^{p-1}(1-x)^{q-1}}{x^{p-1}} = \lim_{x\to 0}(1-x)^{q-1} = 1 \in (0,\infty)$$

Tedy náš integrál konverguje právě tehdy, když $p-1 > -1$, tedy pro $p > 0$.

ii. $\int_{\frac{1}{2}}^{1} x^{p-1}(1-x)^{q-1}\,\mathrm{d}x$

U jedničky srovnáme LSK s $1\cdot(1-x)^{q-1}$. Máme

$$\lim_{x\to 1-} \frac{x^{p-1}(1-x)^{q-1}}{(1-x)^{q-1}} = \lim_{x\to 1-} x^{p-1} = 1 \in (0,\infty)$$

Tedy náš integrál u jedničky konverguje právě tehdy, když konverguje integrál $\int_{\frac{1}{2}}^{1}(1-x)^{q-1}$. Převedeme substitucí $y = 1-x$:

$$\int_{\frac{1}{2}}^{1} (1-x)^{q-1} = \int_{0}^{\frac{1}{2}} y^{q-1}\,\mathrm{d}y,$$

který konverguje právě pro $q-1 > -1$, tedy pro $q > 0$.

Závěr: $\int_0^{\frac{1}{2}} x^{p-1}(1-x)^{q-1}\,\mathrm{d}x$ konverguje právě tehdy, když $p, q > 0$.

(e) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{x^p}{1+x^q}\,\mathrm{d}x$

**Řešení:**

i. $\int_0^1 \frac{x^p}{1+x^q}\,\mathrm{d}x$

A. $q \geq 0$: "1 je silnější než $x^q$" Srovnáváme s funkcí $\frac{x^p}{1}$, tedy

$$\lim_{x\to 0} \frac{\frac{x^p}{1+x^q}}{x^p} = \lim_{x\to 0} \frac{1}{1+x^q} = \begin{cases} 1, & q > 0 \\ \frac{1}{2}, & q = 0. \end{cases}$$

Tedy náš integrál konverguje právě tehdy, když $p > -1$.

B. $q < 0$: "$x^q$ je silnější než 1"
Srovnáváme s funkcí $\frac{x^p}{x^q}$, tedy

$$\lim_{x\to 0} \frac{\frac{x^p}{1+x^q}}{\frac{x^p}{x^q}} = \lim_{x\to 0} \frac{x^q}{1+x^q} = \lim_{x\to 0} \frac{1}{1+x^{-q}} = 1$$

Tedy náš integrál konverguje právě tehdy, když $p - q > -1$.

ii. $\int_1^\infty \frac{x^p}{1+x^q}\,\mathrm{d}x$

A. $q \geq 0$: "$x^q$ je silnější než 1"
Srovnáváme s funkcí $\frac{x^p}{x^q}$, tedy

$$\lim_{x\to \infty} \frac{\frac{x^p}{1+x^q}}{\frac{x^p}{x^q}} = \lim_{x\to \infty} \frac{x^q}{1+x^q} = \begin{cases} 1, & q > 0 \\ \frac{1}{2}, & q = 0. \end{cases}$$

Tedy náš integrál konverguje právě tehdy, když $p - q < -1$.

B. $q < 0$: "1 je silnější než $x^q$" Srovnáváme s funkcí $\frac{x^p}{1}$, tedy

$$\lim_{x\to \infty} \frac{\frac{x^p}{1+x^q}}{x^p} = \lim_{x\to \infty} \frac{1}{1+x^q} = 1$$

Tedy náš integrál konverguje právě tehdy, když $p < -1$.

Závěr: $\int_0^\infty \frac{x^p}{1+x^q}\,\mathrm{d}x$ konverguje právě tehdy, když

$$\begin{aligned}&(q \geq 0 \quad \& \quad p > -1 \quad \& \quad p - q < -1)\\ \vee&(q > 0 \quad \& \quad p < -1 \quad \& \quad p - q > -1)\end{aligned}$$

Lze zapsat i jako:

$$\begin{aligned}&(q > p + 1 \quad \& \quad p > -1)\\ \vee&(q < p + 1 \quad \& \quad p < -1)\end{aligned}$$

(f) $\displaystyle\int_0^\infty e^{-\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x$

**Řešení:** Aplikujeme substituci $y = \sqrt{x}$. Pak

$$\int_0^\infty e^{-\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x = 2\int_0^\infty ye^{-y},$$

což je ale konvergentní integrál.

(g) $\displaystyle\int_0^\infty (\pi - 2\arctan x)^\alpha\,\mathrm{d}x$

**Řešení:**

i. $\displaystyle\int_0^1 (\pi - 2\arctan x)^\alpha\,\mathrm{d}x$

Funkce je na intervalu $[0,1]$ spojitá. Konkrétně

$$\lim_{x\to 0+} (\pi - 2\arctan x)^\alpha = \pi^\alpha.$$

Spojitá funkce na omezeném uzavřeném intervalu $\to$ integrál je konvergentní.

ii. $\displaystyle\int_1^\infty (\pi - 2\arctan x)^\alpha\,\mathrm{d}x$

U $\infty$ srovnáme s $x^{-\alpha}$:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{(\pi - 2\arctan x)^\alpha}{x^{-\alpha}} = 2^\alpha \in (0,\infty).$$

Náš integrál tedy konverguje právě pro $-\alpha < -1$, tedy $\alpha > 1$.

Závěr: Původní integrál tedy konverguje právě pro $-\alpha < -1$, tedy $\alpha > 1$.

(h) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\operatorname{arccot}^a x}{x^b}\,dx$

Integrand $f$ je nezáporná funkce, stačí tedy vyšetřovat absolutní konvergenci. K tomu použijeme limitní srovnávací kritérium a rozklad

$$\int_0^{+\infty} \frac{\operatorname{arccot}^a x}{x^b}\,dx = \int_0^1 \frac{\operatorname{arccot}^a x}{x^b}\,dx + \int_1^{+\infty} \frac{\operatorname{arccot}^a x}{x^b}\,dx$$

Má-li totiž (absolutně) konvergovat integrál vlevo, pak také konvergují (absolutně) oba integrály vpravo (integrujeme přes menší množinu). Naopak, pokud (absolutně) konvergují integrály vpravo, pak také konverguje (absolutně) integrál vlevo (existencí integrálů je zaručena existence primitivní funkce na celém intervalu i konečnost integrálu).

Vyšetřujme nyní (absolutní) konvergenci integrálu

$$\int_0^1 \frac{\operatorname{arccot}^a x}{x^b}\, dx$$

Funkce $\frac{\operatorname{arccot}^a x}{x^b}$ je spojitá a nezáporná na $(0, 1]$, a protože

$$\lim_{x\to 0+} \frac{\frac{\operatorname{arccot}^a x}{x^b}}{\frac{1}{x^b}} = \lim_{x\to 0+} \operatorname{arccot}^a x = (\pi/2)^a$$

je (absolutní) konvergence vyšetřovaného integrálu ekvivalentní (absolutní) konvergenci integrálu

$$\int_0^1 \frac{1}{x^b}\, dx$$

Přímým výpočtem se přesvědčíme, že tento integrál konverguje pro $b < 1$.

Vyšetřujme nyní (absolutní) konvergenci integrálu

$$\int_1^\infty \frac{\operatorname{arccot}^a x}{x^b}\, dx$$

Funkce $\frac{\operatorname{arccot}^a x}{x^b}$ je spojitá a nezáporná na $[1, +\infty)$, a protože

$$\lim_{x\to +\infty} x \operatorname{arccot} x = 1,$$

platí také, že

$$\lim_{x\to +\infty} \frac{\frac{\operatorname{arccot}^a x}{x^b}}{\frac{1}{x^{a+b}}} = \lim_{x\to 0+} x^a \operatorname{arccot}^a x = 1,$$

a tudíž je (absolutní) konvergence vyšetřovaného integrálu ekvivalentní (absolutní) konvergenci integrálu

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^{a+b}}\, dx$$

Přímým výpočtem se přesvědčíme, že tento integrál konverguje pro $a + b > 1$ a diverguje jinak.

Závěr: Integrál konverguje (absolutně), pokud $1 > b > 1 - a$. Jinak diverguje.

(i) $\displaystyle\int_1^{+\infty} \arctan \frac{x}{x^2+1} \ln^a x\, dx$

**Řešení:**

Integrand je nezáporný, stačí vyšetřovat absolutní konvergenci.

Na pravém okolí jedničky je

$$\arctan \frac{x}{x^2+1} \approx \frac{1}{2}, \qquad \ln x = \ln(1 + (x-1)) \approx (x-1)$$

(jak dostaneme použitím Taylorova rozvoje logaritmu v nule). Odtud plyne, že konvergence integrálu

$$\int_1^2 f(x)\, dx$$

je podle limitního srovnávacího kritéria ekvivalentní konvergenci integrálu

$$\int_1^2 (x-1)^a \, dx$$

a použitím substituce $y = x - 1$ dostaneme, že tento je ekvivalentní integrálu

$$\int_0^1 y^a \, dy$$

Poslední integrál konverguje, a to absolutně, pro $a > -1$.
Naopak na okolí nekonečna je

$$\arctan \frac{x}{x^2+1} \approx \frac{1}{x}$$

a podle limitního srovnávacího kritéria je konvergence integrálu

$$\int_2^{+\infty} f(x) \, dx$$

ekvivalentní konvergenci integrálu

$$\int_2^{+\infty} \frac{\ln^a x}{x} \, dx$$

U tohoto integrálu ale umíme přímo určit primitivní funkci. Na intervalu $(2, +\infty)$ platí, že

$$\int \frac{\ln^a x}{x} \, dx = \int y^a \, dy = \frac{y^{a+1}}{a+1} + C = \frac{\ln^{a+1} x}{a+1} + C$$

pro $a \neq -1$. Odtud přímo vyplývá, že integrál konverguje pro $a + 1 < 0$, tedy pro $a < -1$.
Hodnotu $a = -1$ lze také vyloučit přímým výpočtem, ale vzhledem k podmínce u jedničky to není nutné.