7. cvičení – Konvergence Lebesgueova integrálu

https://www2.karlin.mff.cuni.cz/~kuncova/vyuka.php, kuncova@karlin.mff.cuni.cz

Teorie

Věta 1. Nechť $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, a nechť f je **spojitá** funkce na $[a, b]$. Potom $f \in \mathcal{N}(a, b)$.

Věta 2 (limitní srovnávací kritérium)**.** Nechť $-\infty < a < b \leq \infty$ a nechť $a < b$. Nechť f, g jsou **spojité** a nechť g je **kladná** na $[a, b)$.

1. Jestliže $\lim_{x \to b-} \frac{f(x)}{g(x)}$ je vlastní a $\int_a^b g$ konverguje, pak také $\int_a^b f$ konverguje.
2. Jestliže $\lim_{x \to b-} \frac{f(x)}{g(x)}$ je vlastní a nenulová, pak $\int_a^b f$ konverguje právě tehdy, když $\int_a^b g$ konverguje.
3. Jestliže $\lim_{x \to b-} \frac{f(x)}{g(x)}$ je nevlastní a $\int_a^b g$ diverguje, pak také $\int_a^b f$ diverguje.

Věta 3 (srovnávací kritérium pro konvergenci Newtonova integrálu)**.** Nechť $a \in \mathbb{R}$, $b \in R^*$ a nechť $a < b$. Nechť funkce $f, g : [a, b) \to \mathbb{R}$ splňují $0 \leq f(x) \leq g(x)$, $x \in [a, b)$. Nechť dále je f **spojitá** na $[a, b)$ a platí $g \in \mathcal{N}(a, b)$. Potom $f \in \mathcal{N}(a, b)$.

Věta 4. Nechť $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, a nechť f je **spojitá** funkce na $[a, b]$. Potom $f \in \mathcal{N}(a, b)$.

Věta 5 (limitní srovnávací kritérium - divergence)**.** Nechť $-\infty \leq a < b < \infty$ a nechť $a < b$. Nechť f, g jsou **spojité** a nechť g je **kladná** na $(a, b]$.

1. Jestliže $\lim_{x \to a+} \frac{f(x)}{g(x)}$ je vlastní a $\int_a^b f$ diverguje, pak také $\int_a^b g$ diverguje.
2. Jestliže $\lim_{x \to a+} \frac{f(x)}{g(x)}$ je vlastní a nenulová, pak $\int_a^b f$ diverguje právě tehdy, když $\int_a^b g$ diverguje.
3. Jestliže $\lim_{x \to a+} \frac{f(x)}{g(x)}$ je nevlastní a $\int_a^b f$ konverguje, pak také $\int_a^b g$ konverguje.

Algoritmus

1. Najdeme **podezřelé body** - body nespojitosti, krajní body intervalu, nekonečna.
2. Možná je vhodné daný interval **roztrhnout** a vyšetřovat ho po částech.
3. Je funkce **spojitá na omezeném** intervalu? Lze ji **spojitě dodefinovat**?
4. Je možné integrál přímo **upočítat**? Je možné jej (např. substitucí) převést na tabulkový integrál?
5. **SK** a **LSK**. (Srovnávací a limitní srovnávací kritérium.)

Příklady

1. Vyšetřete **absolutní** konvergenci integrálů ($\alpha, a, b, p, q \in \mathbb{R}$):

   (a) $\displaystyle\int_0^1 \frac{\tan x}{\sqrt{x^3}}\,\mathrm{d}x$

   (b) $\displaystyle\int_1^2 \frac{e^x}{x^2 - 1}\,\mathrm{d}x$

   (c)✿ $\displaystyle\int_0^\infty x^{-3/4} e^{-\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x$

   (d)❄ $\displaystyle\int_0^1 x^{-\ln x}\,\mathrm{d}x$

(e) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\arctan px}{x^n}\,\mathrm{d}x$

(f)❀ $\displaystyle\int_0^\pi \frac{\ln(\sin x)}{x\sqrt{\sin x}}\,\mathrm{d}x$

(g)✤ $\displaystyle\int_0^\infty \frac{x-\sin x}{x^p}\,\mathrm{d}x$

(h) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^p x\cos^q x\,\mathrm{d}x$

(i) $\displaystyle\int_1^\infty \sin^2\frac{1}{x}\,\mathrm{d}x$

(j) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\sin\frac{1}{x}\arctan x}{x}\,\mathrm{d}x$

(k) $\displaystyle\int_0^\pi \frac{\sin\left(\frac{1}{\cos x}\right)}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x$

(l) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{1}{\sqrt{x}\log(1+e^x)}\,\mathrm{d}x$

(m)★ $\displaystyle\int_0^\infty \sin\left(\sqrt{x^{2\alpha}+1}-x^\alpha\right)\mathrm{d}x$

2. Příklady z loňska: Vyšetřete **absolutní** konvergenci integrálů ($\alpha, a, b, p, q \in \mathbb{R}$):

(a) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{1}{\sqrt[3]{x^3+1}}\,\mathrm{d}x$

(b) $\displaystyle\int_0^1 \frac{\ln(1+x^2)}{1+x^2}\,\mathrm{d}x$

(c) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{x}{x^3+1}\,\mathrm{d}x$

(d) $\displaystyle\int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}\,\mathrm{d}x$

(e)❀ $\displaystyle\int_0^\infty \frac{x^p}{1+x^q}\,\mathrm{d}x$

(f)✾ $\displaystyle\int_0^\infty e^{-\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x$

(g)✻ $\displaystyle\int_0^\infty (\pi-2\arctan x)^\alpha\,\mathrm{d}x$

(h) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\operatorname{arccot}^a x}{x^b}\,dx$

(i) $\displaystyle\int_1^{+\infty} \arctan\frac{x}{x^2+1}\ln^a x\,dx$

(1c) substituce $y=\sqrt{x}$
(1d) $a^b = e^{b\ln a}$
(1f) začněte s bodem 0
(1g) Taylorův rozvoj
(1m) upravme odmocniny

(2e) uvažujte kombinace záporných i kladných p i q. Pro představu položte např. $p=\pm 3$ a $q=\mp 2$
(2f) substituce $y=\sqrt{x}$
(2g) $\operatorname{arccot} x = \frac{\pi}{2} - \arctan x$