6. cvičení – Součet mocninné řady

https://www2.karlin.mff.cuni.cz/~kuncova/vyuka.php, kuncova@karlin.mff.cuni.cz

Příklady

1. Derivováním člen po členu sečtěte následující řady:

   (a) $x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \dots$

   Řešení: Označme

   $$f(x) = x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{2n+1}.$$

   Poloměr konvergence je roven 1.
   Formálním derivováním člen po členu dostaneme řadu

   $$1 + x^2 + x^4 + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} x^{2n},$$

   což je geometrická řada s prvním členem 1 a kvocientem x^2. Zároveň je to mocninná řada s koeficienty $a_n = 1$. Uvnitř poloměru konvergence platí

   $$f'(x) = 1 + x^2 + x^4 + \dots = \frac{1}{1-x^2}.$$

   Rozkladem na parciální zlomky nebo z tabulky máme

   $$\int \frac{1}{1-x^2}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\ln\frac{1+x}{1-x} + K,$$

   tudíž

   $$f(x) = \frac{1}{2}\ln\frac{1+x}{1-x} + K.$$

   Jelikož

   $$f(0) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{0^{2n+1}}{2n+1} = 0,$$

   a zároveň

   $$f(0) = \frac{1}{2}\ln\frac{1+0}{1-0} + K,$$

   dohromady vyjde $K = 0$ a tedy

   $$f(x) = \frac{1}{2}\ln\frac{1+x}{1-x}, \qquad |x| < 1.$$

   Pro krajní body platí, že řady

   $$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1^{2n+1}}{2n+1}, \qquad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{2n+1}}{2n+1}$$

   divergují (tedy nemá smysl je sčítat).

(b) $x + \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^3}{3} + \dfrac{x^4}{4} + \cdots$

Řešení:

Označme

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}.$$

Poloměr konvergence je pak 1. Na $(-1, 1)$ můžeme zderivovat

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n \frac{x^{n-1}}{n} = \sum_{n=1}^{\infty} x^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n.$$

Geometrickou řadu můžeme sečíst, tedy

$$f'(x) = \frac{1}{1-x}.$$

Po zintegrování dostaneme

$$f(x) = -\ln|1-x| + K.$$

Můžeme dosadit 0:

$$-\ln|1-0| + K = f(0) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{0}{n} = 0$$

a dostaneme $K = 0$. Tedy

$$f(x) = -\ln|1-x|, \qquad x \in (-1, 1).$$

Krajní body: Pro $x = 1$ řada $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ diverguje.

Pro $x = -1$ řada $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$ konverguje z Leibnize. Pro její součet použijeme Abelovu Větu s $r = -1$. Pak

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} = \lim_{x \to -1+} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n} = \lim_{x \to -1+} -\ln|1-x| = -\ln 2.$$

Závěr:

$$f(x) = -\ln|1-x|, \qquad x \in [-1, 1).$$

2. Integrováním člen po členu sečtěte následující řady:

(a) $x + 2x^2 + 3x^3 + \cdots$

Řešení: Máme sečíst řadu
$$\sum_{k=1}^{\infty} kx^k.$$
Řada má poloměr konvergence jedna. Platí, že
$$\sum_{k=1}^{\infty} kx^k = x \cdot \sum_{k=1}^{\infty} kx^{k-1}.$$
Označme
$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} kx^{k-1} = \sum_{k=0}^{\infty} (k+1)x^k$$
Potom na kruhu konvergence platí integrováním člen po členu, že
$$f(x) = F'(x), \qquad \text{kde} \qquad F(x) = \sum_{k=0}^{\infty} (k+1)\frac{x^{k+1}}{k+1} = \sum_{k=0}^{\infty} x^{k+1} = \frac{x}{1-x}.$$
Odtud vyplývá, že
$$f(x) = \left(\frac{x}{1-x}\right)' = \frac{1-x+x}{(1-x)^2} = \frac{1}{(1-x)^2}, \qquad |x| < 1$$
a odtud
$$\sum_{k=1}^{\infty} kx^k = xf(x) = \frac{x}{(1-x)^2}, \qquad |x| < 1.$$
V krajních bodech $x = \pm 1$ řada diverguje (není splněna nutná podmínka konvergence).

(b) $1 \cdot 2x + 2 \cdot 3x^2 + 3 \cdot 4x^3 + \cdots$

Řešení: Máme sečíst řadu
$$\sum_{k=1}^{\infty} k(k+1)x^k.$$
Poloměr konvergence je 1. Podle věty o integraci člen po členu platí
$$\sum_{k=1}^{\infty} k(k+1)x^k = \left(\sum_{k=1}^{\infty} kx^{k+1}\right)' = \left(x^2 \cdot \sum_{k=1}^{\infty} kx^{k-1}\right)' =$$
$$= \left(x^2 \cdot \left(\sum_{k=1}^{\infty} x^k\right)'\right)' = \left(x^2 \cdot \left(\frac{x}{1-x}\right)'\right)' = \left(x^2 \cdot \frac{1}{(1-x)^2}\right)' =$$
$$= \frac{2x(1-x)^2 + 2x^2(1-x)}{(1-x)^4} = \frac{2x - 4x^2 + 2x^3 + 2x^2 - 2x^3}{(1-x)^4} = \frac{2x}{(1-x)^3}, \qquad |x| < 1.$$
V krajních bodech $x = \pm 1$ řada diverguje (nutná podmínka konvergence).

3. Derivováním nebo integrováním člen po členu sečtěte následující řady:

(a) $x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \cdots$
Označme
$$f(x) = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}.$$
Poloměr konvergence je 1.
Derivováním člen po členu dostaneme řadu
$$1 - x^2 + x^4 + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{2n}$$
což je geometrická řada s prvním členem 1 a kvocientem $-x^2$. Poloměr konvergence je též 1.
Uvnitř kruhu konvergence platí
$$f'(x) = 1 - x^2 + x^4 + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} (-x^2)^n = \frac{1}{1+x^2}.$$
Platí, že
$$(\arctan x)' = \frac{1}{1+x^2},$$
tudíž
$$f(x) = \arctan x + K.$$
Jelikož
$$\arctan 0 + K = f(0) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{0^{2n+1}}{2n+1} = 0,$$
tak $K = 0$.
Máme tedy
$$f(x) = \arctan x, \qquad |x| < 1.$$
V krajních bodech
$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(\pm 1)^{2n+1}}{2n+1} = 0$$
konverguje z Leibnize. Aplikujme Abelovu větu. Pak
$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1^{2n+1}}{2n+1} = \lim_{x\to 1-} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} = \lim_{x\to 1-} \arctan x = \frac{\pi}{4}.$$
a
$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(-1)^{2n+1}}{2n+1} = \lim_{x\to -1+} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} = \lim_{x\to -1+} \arctan x = -\frac{\pi}{4}.$$
Závěr:
$$f(x) = \arctan x, \qquad x \in [-1, 1].$$

(b) $x - 4x^2 + 9x^3 - 16x^4 + \cdots$
Řešení: Máme sečíst řadu

$$\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k+1}k^2x^k$$

Řada má poloměr konvergence 1.
Podle věty o integrování člen po členu, máme pro $|x| < 1$

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k+1}k^2x^k &= x \cdot \sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k+1}k^2x^{k-1} = x \cdot \left(\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k+1}kx^k\right)' \\
&= x \cdot \left(x \cdot \sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k+1}kx^{k-1}\right)' = x \cdot \left(x \cdot \left(\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k+1}x^k\right)'\right)' \\
&= x \cdot \left(x \cdot \left(\frac{x}{1+x}\right)'\right)' = x \cdot \left(x \cdot \left(\frac{(1+x)-x}{(1+x)^2}\right)\right)' = x \cdot \left(\frac{x}{(1+x)^2}\right)' \\
&= x \cdot \left(\frac{(1+x)^2 - 2x(1+x)}{(1+x)^4}\right) = x \cdot \frac{1-x^2}{(1+x)^4} = \frac{x(1-x)}{(1+x)^3}.
\end{aligned}$$

V krajních bodech $x = \pm 1$ řada diverguje (nutná podmínka konvergence).

(c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(n+1)x^n$
Řešení:
Poloměr konvergence řady je 1. Integrováním člen po členu dostaneme pro $|x| < 1$

$$\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)x^n = \left(\sum_{n=0}^{\infty}x^{n+1}\right)' = \left(\frac{x}{1-x}\right)' = \frac{1}{(1-x)^2}.$$

V krajních bodech $x = \pm 1$ řada diverguje (nutná podmínka konvergence).

4. Rozviňte do mocninné řady (o středu 0) funkce:

(a) $\dfrac{1}{1+x^3}$
Řešení: Dosadíme do geometrické řady $\frac{1}{1-y} = \sum_{n=0}^{\infty} y^n$ pro $y \in (-1, 1)$. Tedy

$$\frac{1}{1+x^3} = \sum_{n=0}^{\infty}(-x^3)^n = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^{3n}.$$

Platí pro $x \in (-1, 1)$.

(b) $\dfrac{x^2+1}{x^2-1}$
Řešení: Máme

$$\frac{x^2+1}{x^2-1} = \frac{x^2-1+2}{x^2-1} = 1 + \frac{-2}{1-x^2}.$$

Po dosazení do geometrické řady vyjde

$$1 + \frac{-2}{1-x^2} = 1 - 2\sum_{n=0}^{\infty} x^{2n}.$$

Konverguje pro $x \in (-1, 1)$.

(c) $\arctan x$

Řešení: Označme $f(x) = \arctan x$. Pak $f'(x) = \frac{1}{1+x^2}$. Z geometrické řady máme

$$f'(x) = \frac{1}{1-(-x^2)} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{2n}.$$

Pak

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + c.$$

Víme, že $f(0) = \arctan(0) = 0$. Tedy

$$0 = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{0^{2n+1}}{2n+1} + c = c.$$

Tedy $c = 0$ a můžeme psát

$$\arctan x = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$$

na poloměru konvergence, tedy $x \in (-1, 1)$.

V krajních bodech řada konverguje z Leibnize, použijeme tedy Abelovu větu a dostaneme:

$$\lim_{x\to 1-} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} = \lim_{x\to 1-} \arctan x = \arctan 1 = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1^{2n+1}}{2n+1} = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{2n+1}$$

Analogicky

$$\arctan(-1) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{-1}{2n+1}.$$

Závěr:

$$\arctan x = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$$

na $x \in [-1, 1]$.

(d) $(1 + x)\ln(1 + x)$

Řešení: Označme $g(x) = \ln(1 + x)$. Pak $g'(x) = \frac{1}{1+x}$, tedy z geometrické řady je

$$g'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-x)^n = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n$$

pro $x \in (-1, 1)$.
Po integraci dostaneme

$$g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1} + c.$$

Dosadíme

$$g(0) = \ln 1 = 0 = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{0^{n+1}}{n+1} + c = c,$$

tedy $c = 0$. Máme tedy $g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1}$ pro $x \in (-1, 1)$.
Pro původní funkci platí

$$(1+x)\ln(1+x) = (1+x)\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1} + \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{n+2}}{n+1}.$$

Po úpravě

$$(1+x)\ln(1+x) = x + \sum_{n=1}^{\infty} x^{n+1}(-1)^n \left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n}\right) = x + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^{n+1}}{n(n+1)}$$

pro $x \in (-1, 1)$.
Pro $x = -1$ není původní funkce definovaná, ale pro $x = 1$ použijeme Abelovu větu (řada konverguje srovnáním s $1/n^2$).

$$\lim_{x\to 1-} \lim_{x\to 1-} (1+x)\ln(1+x) = 2\ln 2 = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1^{n+1}}{n(n+1)} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{n(n+1)}.$$

Závěr:

$$(1+x)\ln(1+x) = x + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^{n+1}}{n(n+1)}$$

pro $x \in (-1, 1]$.

(e) $\dfrac{1}{3-2x}$

Řešení: Vytkneme a pak aplikujeme geometrickou řadu.

$$\frac{1}{3-2x} = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{1 - \frac{2}{3}x} = \frac{1}{3} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{2}{3}x\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n x^n}{3^{n+1}}$$

pro $x \in (-3/2, 3/2)$.

(f) $\dfrac{1}{(1-x)^2}$

Řešení: Položme $f(x) = \frac{1}{(1-x)^2}$. Pak $F(x) = \frac{1}{1-x}$. Z geometrické řady

$$F(x) = \sum_{n=0}^{\infty} x^n, \quad x \in (-1, 1).$$

Po zderivování máme

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n x^{n-1}$$

pro $x \in (-1, 1)$.

(g) $\sin^2 x$

Řešení: Platí

$$f(x) = \sin^2 x = \frac{1}{2}(1 - \cos(2x)).$$

Z Taylorova rozvoje pro kosinus je

$$f(x) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{(2x)^{2n}}{(2n)!} = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{2^{2n-1}}{(2n)!}x^{2n},$$

$x \in \mathbb{R}$.

Zkouškové příklady

5. Sečtěte řadu

(a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n+2}}{n(n+1)}$

Řešení: Poloměr konvergence je roven 1.

Položme

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n+2}}{n(n+1)} = x \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n+1}}{n(n+1)}$$

Zderivujme funkci $g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n+1}}{n(n+1)}$. Dostáváme

$$g''(x) = \left(\sum_{n=1}^{\infty}(n+1)\frac{x^n}{n(n+1)}\right)' = \sum_{n=1}^{\infty} x^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}$$

Pak

$$g'(x) = -\ln|1-x| + K.$$

Jelikož jsme na intervalu $(-1, 1)$, můžeme psát

$$g'(x) = -\ln(1-x) + K.$$

Pro $x = 0$ máme

$$-\ln(1-0) + K = g'(0) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n} = 0,$$

tedy $K = 0$.

Po zintegrování (per partes):

$$g(x) = x - (x-1)\ln(1-x) + M.$$

Po dosazení $x = 0$ dostaneme

$$g(0) = 0 - (0-1)\ln(1-0) + M = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{0^{n+1}}{n(n+1)} = 0,$$

tedy $M = 0$.
Dohromady pro $x \in (-1, 1)$:

$$f(x) = xg(x) = x^2 - x(x-1)\ln(1-x).$$

V krajních bodech řada $x = \pm 1$ konverguje (srovnání s $1/n^2$). Dle Abelovy věty máme:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1^{n+2}}{n(n+1)} = \lim_{x \to 1-} x^2 - x(x-1)\ln(1-x) = 1 + 0$$

a

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+2}}{n(n+1)} = \lim_{x \to -1+} x^2 - x(x-1)\ln(1-x) = 1 - 2\ln 2.$$

Dohromady pro $x \in [-1, 1]$:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - x(x-1)\ln(1-x), & x \in [-1, 1) \\ 1, & x = 1. \end{cases}$$

(b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} n^2 \frac{x^{n+2}}{n!}$

Řešení:
Poloměr konvergence je roven ∞.
Položme

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n^2 \frac{x^{n+2}}{n!}.$$

Využijeme součtu řady $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = e^x$.
Mějme

$$g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n^2 \frac{x^{n-1}}{n!}.$$

Pak $f(x) = x^3 g(x)$.
Máme

$$g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n^2 \frac{x^{n-1}}{n!} = \left(\sum_{n=1}^{\infty} n \frac{x^n}{n!}\right)' = \left(x \sum_{n=1}^{\infty} n \frac{x^{n-1}}{n!}\right)' = \left(x \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n!}\right)'\right)'.$$

Poslední sumu nahradíme $e^x - 1$ (platí pro $x \in \mathbb{R}$) a zpátky proderivujeme:

$$g(x) = \left(x \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n!}\right)'\right)' = \big(x\,(e^x - 1)'\big)' = (xe^x)' = e^x(x+1)$$

Pro $x \in \mathbb{R}$ $f(x) = x^3 e^x (x+1) = e^x(x^4 + x^3)$.

(c) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{3n+1}{2n^2+n}x^{2n+1}$

Řešení: Platí, že $a_k=0$ pro sudá k, pro lichá $k=2n+1$ je $a_k=(-1)^n\frac{3n+1}{2n^2+n}$. Poloměr konvergence je tedy roven 1. V krajích řada konverguje podle Leibnizova kritéria.

Pro $x\in(-1,1)$ položme $f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{3n+1}{2n^2+n}x^{2n+1}$. Pak

$$f'(x)=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{3n+1}{n}x^{2n}.$$

Řadu můžeme roztrhnout na

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n 3x^{2n}.+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{n}x^{2n}.$$

Z geometrické řady je

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n 3x^{2n}=\frac{-3x^2}{1+x^2}.$$

Z Taylorova rozvoje logaritmu pak máme

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{n}x^{2n}=-\log(1+x^2).$$

Dohromady je

$$f'(x)=\frac{-3x^2}{1+x^2}-\log(1+x^2).$$

Po zintegrování dostaneme

$$f(x)=-x+\arctan x-x\log(1+x^2)+c.$$

Dosadíme 0 a získáme $c=0$. Pro $x\in(-1,1)$ tedy platí

$$f(x)=-x+\arctan x-x\log(1+x^2).$$

Protože řada v krajích konverguje, z Abelovy věty dostaneme

$$f(x)=-x+\arctan x-x\log(1+x^2),\quad x\in[-1,1].$$

(d) $\sum_{n=2}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{n-1}{n!}x^n$

Řešení: Poloměr konvergence $R=\infty$. Položme

$$f(x)=\sum_{n=2}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{n-1}{n!}x^n=-\sum_{n=2}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{x^n}{n!}+\sum_{n=2}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{n}{n!}x^n$$

Z rozvoje exponenciály máme

$$\sum_{n=2}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{x^n}{n!}=-\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-x)^n}{n!}=-(e^{-x}+x-1)$$

a

$$\sum_{n=2}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{n}{n!}x^n = x\sum_{n=2}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{(n-1)!}x^{n-1} = x\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-x)^{n-1}}{(n-1)!} = x(e^{-x}-1)$$

Dohromady pak

$$f(x) = e^{-x} + x - 1 + xe^{-x} - x = (x+1)e^{-x} - 1$$