



5. cvičení – Derivace a řady funkcí, Poloměr mocninné řady  
<https://www2.karlin.mff.cuni.cz/~kuncova/vyuka.php>, [kuncova@karlin.mff.cuni.cz](mailto:kuncova@karlin.mff.cuni.cz)

### Příklady

1. (a) Spočtete  $f'(0)$  (vyjádřete jako řadu):

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\sin\left(1 + \frac{x}{n}\right)}{\sqrt{n}}$$

**Řešení:** Aplikujeme větu o záměně sumy a derivace. Ověřujeme tedy tři podmínky.

- $f_n$  má vlastní derivaci na  $\mathbb{R}$ :

$$f'_n = (-1)^n \frac{\cos\left(1 + \frac{x}{n}\right)}{n\sqrt{n}}$$

- existuje  $x_0 \in (a, b)$  takové  $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x_0)$  konverguje: Pro  $x = 0$  máme

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\sin 1}{\sqrt{n}}$$

konverguje dle Leibnize.

- řada  $\sum_{n=1}^{\infty} f'_n$  konverguje stejnoměrně na  $\mathbb{R}$ : Máme odhad

$$|f'_n| = \left| (-1)^n \frac{\cos\left(1 + \frac{x}{n}\right)}{n\sqrt{n}} \right| \leq \frac{1}{n^{3/2}}$$

a  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{3/2}}$  konverguje.

Tedy můžeme prohodit řadu a derivaci a dostaneme

$$f'(0) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\cos 1}{n\sqrt{n}}.$$

- (b) Spočtete derivaci funkce (vyjádřete jako řadu):

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{2^n}$$

**Řešení:** Aplikujeme větu o záměně sumy a derivace. Ověřujeme tedy tři podmínky.

- $f_n$  má vlastní derivaci na  $\mathbb{R}$ :

$$f'_n = \frac{n \cos nx}{2^n}$$

- existuje  $x_0 \in (a, b)$  takové  $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x_0)$  konverguje: Pro  $x = 0$  máme

$$\sum_{n=1}^{\infty} 0$$

konverguje.

- řada  $\sum_{n=1}^{\infty} f'_n$  konverguje stejnoměrně na  $\mathbb{R}$ : Máme odhad

$$|f'_n| = \left| \frac{n \cos nx}{2^n} \right| \leq \frac{n}{2^n}$$

a  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n}$  konverguje z limitního podílového kritéria.

Tedy můžeme prohodit řadu a derivaci a dostaneme

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n \cos nx}{2^n}$$

- (c) Dokažte, že pro Riemannovu zeta funkci

$$\zeta(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^x}$$

platí  $\zeta \in C^1(1, \infty)$ .

**Řešení:** Řada konverguje právě pro  $x \in (1, \infty)$ . Tam budeme řadu vyšetřovat.

Aplikujeme větu o záměně sumy a derivace. Ověřujeme tedy tři podmínky.

- $f_n$  má vlastní derivaci na  $(1, \infty)$ :

$$f'_n = -\frac{\log n}{n^x}$$

- existuje  $x_0 \in (1, \infty)$  takové  $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x_0)$  konverguje: Pro  $x = 2$  máme

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$$

konverguje.

- řada  $\sum_{n=1}^{\infty} f'_n$  konverguje stejnoměrně na  $(1 + \varepsilon, \infty)$ . Máme odhad

$$|f'_n| = \left| \frac{-\log n}{n^x} \right| \leq \frac{\log n}{n^{1+\varepsilon}}$$

a  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{-\log n}{n^{1+\varepsilon}}$  konverguje.

Z vět o derivaci a spojitosti dostaneme, že  $\zeta(x) \in C^1(1 + \varepsilon, \infty)$ .

Proces lze zopakovat pro každé  $\varepsilon > 0$  a tedy  $\zeta(x) \in C^1(1, \infty)$ .

2. Uvažujte funkci

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-x^2 + 6x - 8)^n.$$

- (a) Určete, pro která  $x$  je  $f$  definována.

**Řešení:** jde o geometrickou řadu, tedy potřebujeme

$$-1 < -x^2 + 6x - 8 < 1$$

Po vyřešení kvadratických nerovnic vyjde  $x \in (3 - \sqrt{2}, 3) \cup (3, 4 + \sqrt{2})$ .

(b) Dokažte, že funkce  $f$  je spojitá v bodě  $7/2$ .

**Řešení:** Potřebujeme ukázat spojitost  $f$  na nějakém okolí bodu  $3,5$ . Uvažujme  $U = (3, 3; 3, 7)$ .  $f_n$  jsou tam zjevně spojitá. Pokud  $\sum_{n=1}^{\infty} f_n \Rightarrow$ , tak bude spojitá i  $f$ .

Aplikujeme Weierstrassovo kritérium. Tedy fixujeme  $n \in \mathbb{N}$  a hledáme

$$\sigma_n = \sup\{|f_n| : x \in U\}$$

Z tvaru  $f_n$  plyne, že

$$\sigma_n = 0,91^n.$$

Protože geometrická řada  $\sum_{n=1}^{\infty} 0,91^n$  konverguje, tak  $\sum_{n=1}^{\infty} f_n \Rightarrow$  a tedy je  $f$  spojitá na  $U$ .

(c) Dokažte, že funkce  $f$  má vlastní derivaci v bodě  $7/2$  a vyjádřete  $f'(7/2)$  jako součet číselné řady.

Aplikujeme větu o záměně derivace a řady.

- $f_n$  jsou diferencovatelné na  $U$  - jsou to polynomy.
- $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(4) = \sum_{n=1}^{\infty} 0$  konverguje.
- Vyšetřeme  $\sum_{n=1}^{\infty} f'_n$ .

$$f'_n = n(-x^2 + 6x - 8)^{n-1}(-2x + 6)$$

Zafixujeme  $n \in \mathbb{N}$ . Pak

$$\sigma_n = \sup\{|n(-x^2 + 6x - 8)^{n-1}(-2x + 6)| : x \in U\} \leq |n(0,91)^{n-1}(-1,4)|$$

Máme

$$\sum_{n=1}^{\infty} |n(0,91)^{n-1}(-1,4)| < \infty$$

z d'Alambertova kritéria.

Tedy  $\sum_{n=1}^{\infty} f'_n \Rightarrow$ .

Z věty plyne

$$f'(7/2) = \sum_{n=1}^{\infty} n \left(\frac{3}{4}\right)^{n-1} \cdot (-1)$$

3. Určete poloměr konvergence  $R$  následujících mocninných řad a také konvergenci na hranici.

(a)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \alpha^{n^2} \cdot x^n,$$

kde  $(0 < \alpha < 1)$

**Řešení:** Podle Cauchy-Hadamardova vztahu

$$\frac{1}{R} = \limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|\alpha^{n^2}|} = \limsup_{n \rightarrow \infty} \alpha^n = 0,$$

a tedy  $R = +\infty$ .

(b)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^p},$$

kde  $p \in \mathbb{R}$ .

**Řešení:** Pro každé  $p \in \mathbb{R}$  platí

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{\frac{1}{n^p}}{\frac{1}{(n+1)^p}} \right| = 1,$$

tudíž poloměr konvergence je vždy 1.

Chování na hranici:

Pokud  $p > 1$ , pak řada konverguje absolutně na hranici.

Pokud  $1 \geq p > 0$ , potom řada

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^p},$$

konverguje neabsolutně dle Leibnize. Řada

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p},$$

diverguje.

Pro  $p \leq 0$  řada na hranici diverguje.

(c)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{a^{n^2}} \cdot x^n,$$

kde ( $a > 1$ )

**Řešení:**

Platí

$$R = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{n!}{a^{n^2}}}{\frac{(n+1)!}{a^{(n+1)^2}}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a^{(n+1)^2 - n^2}}{n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a^{2n+1}}{n+1} = +\infty.$$

(d)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n + (-2)^n}{n} (x+1)^n$$

**Řešení:**

Platí

$$\frac{1}{R} = \limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{|3^n + (-2)^n|}{n}} = \limsup_{n \rightarrow \infty} 3 \cdot \frac{\sqrt[n]{|1 + (-2/3)^n|}}{\sqrt[n]{n}} = 3 \cdot \frac{1}{1} = 3.$$

tudíž poloměr konvergence je  $\frac{1}{3}$ . (V odhadech jsme použili  $\sqrt[n]{1} \leq |\sqrt[n]{1 + (-2/3)^n}| \leq \sqrt[n]{2}$  a faktu, že  $\limsup$  se bude týkat sudých  $n$ .)

Chování na hranici: Je třeba vyšetřit konvergenci řady

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n + (-2)^n}{n} \left(\frac{1}{3}\right)^n$$

a

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n + (-2)^n}{n} \left(-\frac{1}{3}\right)^n.$$

V prvním případě máme

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n + (-2)^n}{n} \left(\frac{1}{3}\right)^n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 + \left(-\frac{2}{3}\right)^n}{n},$$

což porovnáme s řadou  $b_n = 1/n$ , což diverguje.

V druhém případě získáme

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n + (-2)^n}{n} \left(-\frac{1}{3}\right)^n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} + \frac{2^n}{n3^n}.$$

První část konverguje z Leibnize, druhá z d'Alamberta, tedy konverguje. Absolutní konvergenci již vyloučil první případ.

(e)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} x^{n^2}$$

**Řešení:**

Jedná se o mocninnou řadu, jejíž koeficienty jsou povětšinou nulové, s výjimkou koeficientů u  $x^{n^2}$ . Je třeba myslet na to, že koeficient  $\frac{1}{2^n}$  je koeficient nikoliv u  $n$ -tého, ale  $n^2$ -tého členu této řady. Abychom mohli použít vztahy pro výpočet poloměru konvergence, potřebujeme najít vztah pro  $n$ -tý koeficient  $a_n$ .

Jestliže ale platí

$$a_{n^2} = \frac{1}{2^n} \quad \text{a koeficienty jsou jinde nulové,}$$

potom

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{2^{\sqrt{n}}} && \text{pokud } n = k^2 \text{ pro nějaké } k \text{ přirozené} \\ a_n &= 0 && \text{jinak} \end{aligned}$$

Podle Cauchy-Hadamardova vztahu spočteme

$$\frac{1}{R} = \limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{2^{\sqrt{n}}}\right)^{1/n} = \lim_{n \rightarrow \infty} 2^{-\sqrt{n} \cdot \frac{1}{n}} = 2^0 = 1.$$

Na hranici řada zjevně konverguje absolutně.

(f)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n)!!}{(2n+1)!!} x^n$$

**Řešení:** Platí

$$R = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{(2n)!!}{(2n+1)!!}}{\frac{(2n+2)!!}{(2n+3)!!}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n+3}{2n+2} = 1.$$

Pro konvergenci na hranici využijeme odhadů dokazatelných indukci

$$\frac{(2n)!!}{(2n+1)!!} > \frac{1}{2n+1}, \quad \frac{(2n)!!}{(2n+1)!!} < \frac{1}{\sqrt{2n+2}}.$$

Z prvního odhadu je zřejmé, že pro  $x = 1$  řada diverguje srovnáním s řadou  $\sum \frac{1}{2n+1}$ . Z druhého odhadu vyplývá, že pro  $x = -1$  řada konverguje neabsolutně podle Leibnize. (Nutno dokázat monotonii posloupnosti  $\frac{(2n)!!}{(2n+1)!!}$ ).

(g)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{[3 + (-1)^n]^n}{n} x^n$$

**Řešení:** Platí

$$\frac{1}{R} = \limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{[3 + (-1)^n]^n}{n}} = \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{3 + (-1)^n}{\sqrt[n]{n}} = 4.$$

Tudíž  $R = \frac{1}{4}$ .

Konvergence na hranici: Vyšetřujeme řady

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{[3 + (-1)^n]^n}{n} \frac{1}{4^n}$$

a

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{[3 + (-1)^n]^n (-1)^n}{n} \frac{1}{4^n}.$$

Uvažujme první řadu.

Podíváme-li se pouze na sudé členy, dostaneme

$$a_{2n} = \frac{4^{2n}}{2n} \frac{1}{4^{2n}} = \frac{1}{2n}.$$

Pro liché členy dostaneme

$$a_{2n+1} = \frac{2^{2n+1}}{2n+1} \frac{1}{4^{2n+1}} = \frac{1}{2n+1} \frac{1}{2^{2n+1}}.$$

Naši řadu lze tedy odhadnout zdola divergentní řadou  $b_n = 1/(2n)$ , tedy i řada

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{[3 + (-1)^n]^n}{n} \frac{1}{4^n}$$

diverguje.

U druhé řady dostaneme opět sudé členy

$$a_{2n} = \frac{4^{2n} - 1}{2n \cdot 4^{2n}} = \frac{1}{2n}.$$

Pro liché členy dostaneme

$$a_{2n+1} = \frac{2^{2n+1} - 1}{2n + 1 \cdot 4^{2n+1}} = \frac{-1}{2n + 1} \frac{1}{2^{2n+1}}.$$

Z předchozího máme, že absolutně řada nekonverguje.

Pro neabsolutní konvergenci uvažujme posloupnost částečných součtů  $s_n$ . Protože pro liché členy je  $|a_{2n+1}| \leq \frac{1}{2^{2n+1}}$ , máme

$$\begin{aligned} s_n &= a_1 + a_2 + \dots + a_n \geq \frac{1}{2} - \frac{1}{8} + \frac{1}{4} - \frac{1}{32} + \frac{1}{6} - \frac{1}{128} + \dots + a_{n-1} + a_n \\ &= \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{6} + \dots - \left( \frac{1}{8} + \frac{1}{32} + \frac{1}{128} + \dots \right) \geq \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{6} + \dots - \left( \frac{2}{3} \right). \end{aligned}$$

Pro limitu částečných součtů pak máme

$$\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = \infty - \frac{2}{3} = \infty,$$

tedy řada diverguje.

(h)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{a^n + b^n},$$

kde  $a > 0$ ,  $b > 0$ .

**Řešení:**

BÚNO předpokládejme, že  $a > b$ . Pak Podle Cauchy-Hadamardova vztahu platí

$$\frac{1}{R} = \limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{1}{a^n + b^n}} = \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{a} \sqrt[n]{\frac{1}{1 + (b/a)^n}} = \frac{1}{a},$$

a tudíž

$$R = a.$$

(Použili jsme odhady  $1 \leq 1 + (b/a)^n \leq 2$ .)

Na hranici řada diverguje, neboť nesplňuje nutnou podmínku konvergence, protože

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a^n}{a^n + b^n} \rightarrow 1 \neq 0.$$

(i)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^2}{(2n)!} x^n$$

**Řešení:**

Je

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{(n!)^2}{(2n!)}}{\frac{((n+1)!)^2}{(2n+2)!}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(2n+2)(2n+1)}{(n+1)^2} = 4.$$

Tudíž poloměr konvergence je 4.

Na hranici tedy vyšetřujeme řadu

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^2}{(2n)!} 4^n$$

a

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^2}{(2n)!} (-1)^n 4^n.$$

Pro  $x = -4$  máme:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (n!)^2 4^n}{(2n)!}$$

použijeme NP a zjišťujeme, zda

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n!)^2 4^n}{(2n)!}$$

jde k 0. Porovnáme  $a_n$  a  $a_{n+1}$ :

$$\frac{a_n}{a_{n+1}} = \frac{n! n! 4^n (2n+2)!}{(2n)! (n+1)! (n+1)! 4 \cdot 4^n} = \frac{(2n+2)(2n+1)}{4(n+1)^2} = \frac{4n+2}{4n+4} < 1$$

Tedy posloupnost  $a_n$  je rostoucí, první člen je roven 1, tedy zjevně nejde k 0, tedy řada diverguje v bodě -4. Tedy v bodě 4 také.

Závěr: řada konverguje na  $(-4, 4)$ .

(j)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n^2} \cdot x^n$$

**Řešení:** Podle Cauchy-Hadamardova vztahu

$$\frac{1}{R} = \limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\left| \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n^2} \right|} = \limsup_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e,$$

a tedy  $R = \frac{1}{e}$ .

Na hranici tedy vyšetřujeme řadu

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n^2} \frac{1}{e^n}$$

a

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n^2} \frac{1}{e^n} (-1)^n.$$



Platí ale

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n^2} \frac{1}{e^n} = \frac{1}{\sqrt{e}},$$

tudíž řada diverguje, protože nespĺňuje nutnou podmínku konvergence  $a_n \rightarrow 0$ . Limitu lze spočítat například takto pomocí Taylorova rozvoje (s využitím spojitosti exponenciální funkce):

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^{x^2} \frac{1}{e^x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \exp \left[ x^2 \ln \left(1 + \frac{1}{x}\right) - x \right] = e^{-\frac{1}{2}}$$

Protože pro  $y = \frac{1}{x}$  máme z Taylora:

$$\lim_{y \rightarrow 0} \frac{1}{y^2} \ln(1+y) - \frac{1}{y} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{1}{y^2} \left( y - \frac{1}{2}y^2 + o(y^2) \right) - \frac{1}{y} = -\frac{1}{2} + 0 = -\frac{1}{2}.$$

Závěr: řada konverguje na  $(-1/e, 1/e)$ .

(k)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{a^{\sqrt{n}}},$$

kde  $a > 0$ .

**Řešení:**

Podle Cauchy-Hadamardova vztahu platí

$$\frac{1}{R} = \limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{1}{a^{\sqrt{n}}}} = \limsup_{n \rightarrow \infty} a^{-\sqrt{n} \cdot 1/n} = a^0 = 1.$$

Tedy

$$R = 1.$$

Pokud  $a > 1$ , potom řada na hranici konverguje absolutně, což plyne ze srovnání

$$\frac{\frac{1}{a^{\sqrt{n}}}}{\frac{1}{n^2}} = \frac{n^2}{a^{\sqrt{n}}} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.$$

(Limitu lze spočítat například použitím Heineho věty a dvojnásobným aplikováním l'Hopitalova pravidla.)

Pokud  $0 < a \leq 1$ , potom řada na hranici diverguje, neboť nespĺňuje nutnou podmínku konvergence,  $a_n \not\rightarrow 0$ .

(l)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{a^n}{n} + \frac{b^n}{n^2} \right) \cdot x^n,$$

kde  $a > 0$ ,  $b > 0$ .

**Řešení:** Máme

$$a_n = \frac{a^n}{n} + \frac{b^n}{n^2}$$

Vyšetříme dva případy, nejprve  $a \geq b$ , pak

$$a = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{a^n}{n}} \leq \limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{a^n}{n} + \frac{b^n}{n^2}} \leq \limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{a^n}{n} + \frac{a^n}{n^2}} \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{2a^n}{n}} = a$$

$$\rho = \frac{1}{a}$$

analogicky pro  $a < b$ :

$$b = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{b^n}{n^2}} \leq \limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{a^n}{n} + \frac{b^n}{n^2}} \leq \limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{b^n}{n} + \frac{b^n}{n^2}} \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{2b^n}{n}} \stackrel{VOAL}{=} b$$

$$\rho = \frac{1}{b}$$

Krajní body vyšetříme pro oba případy zvlášť. Řadu rozvíjíme v 0, tedy krajní body jsou  $\rho = \frac{1}{a}, \frac{1}{b}$  a  $-\rho = -\frac{1}{a}, -\frac{1}{b}$ .

Nechť  $a \geq b$ . Pak nás zajímá řada:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left( \frac{a^n}{n} + \frac{b^n}{n^2} \right) \frac{1}{a^n} = \sum_{n=0}^{\infty} \left( \frac{1}{n} + \frac{b^n}{a^n n^2} \right) \geq \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n}$$

Použijeme porovnání řad (mají kladné členy) a zjistíme, že řada diverguje. Druhý krajní bod:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left( \frac{a^n}{n} + \frac{b^n}{n^2} \right) \frac{(-1)^n}{a^n} = \sum_{n=0}^{\infty} \left( \frac{(-1)^n}{n} + \frac{(-1)^n b^n}{a^n n^2} \right)$$

Toto můžeme roztrhnout na 2 konvergentní řady, první konverguje z Leibnize, druhá taktéž. Tedy řada v krajním bodě  $-1/a$  konverguje, ale nikoli absolutně.

Nechť  $a < b$ . Pak nás zajímá řada:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left( \frac{a^n}{n} + \frac{b^n}{n^2} \right) \frac{1}{b^n} = \sum_{n=0}^{\infty} \left( \frac{a^n}{b^n n} + \frac{1}{n^2} \right)$$

Toto opět roztrhneme na 2 řady, první konverguje z d'Alembertova kritéria, o druhé to víme. Tedy roztržení bylo korektní (roztrhli jsme na 2 konvergentní řady), řada konverguje. Dosadíme-li následně jako krajní bod  $-1/b$ , můžeme rozvnou říci, že řada konverguje absolutně.

## Bonus

4. Víme, že řada  $\sum a_n(x+7)^n$  konverguje pro  $x = 0$  a diverguje pro  $x = -17$ . Co můžeme říct o poloměru konvergence?

**Řešení:** Jelikož je střed mocninné řady v  $x_0 = -7$ , pro poloměr konvergence platí  $7 \leq \rho \leq 10$ .

5. Víme, že řada  $\sum a_n x^n$  konverguje pro  $x = -4$  a diverguje pro  $x = 7$ . Určete, zda jsou následující výroky pravdivé, nepravdivé nebo pravdivost nelze určit:

LEŽ Řada konverguje pro  $x = 10$ .

PRAVDA Řada konverguje pro  $x = 3$ .

LEŽ Řada diverguje pro  $x = 1$ .

NEVÍME Řada diverguje pro  $x = 6$ .

**Řešení:** Střed je v  $x_0 = 0$ , poloměr konvergence  $4 \leq R \leq 7$ . Tedy řada určitě konverguje na  $[-4, 4)$  a určitě diverguje na  $[7, \infty)$  a  $(-\infty, -7)$ . Na ostatních intervalech nevíme.

6. Najděte mocninnou řadu, která:

(a) diverguje pro  $x = 0$ ;

**Řešení:**

Např.  $\sum_{n=0}^{\infty} 5^n (x - 42)^n$ . Tato řada má poloměr konvergence  $R = 1/5$  a střed v  $x_0 = 42$ . V 0 tedy určitě diverguje. (Lze zjistit i dosazením,  $\sum_{n=0}^{\infty} 5^n 42^n$  diverguje.)

(b) konverguje pro  $x = 5$ , ale nikde jinde;

**Řešení:**

Např.  $\sum_{n=0}^{\infty} n! (x - 5)^n$ .

(c) má střed konvergence v 0, poloměr konvergence roven 2 a konverguje pro 2, ale diverguje pro  $-2$ .

**Řešení:** Zkusme řadu

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n2^n} x^n.$$

Poloměr konvergence je  $R = 2$ . Pro krajní bod  $x = 2$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n2^n} 2^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n},$$

což konverguje. Pro  $x = -2$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n2^n} (-2)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n},$$

což diverguje.

7. Necht' mocninná řada  $\sum a_n x^n$  má poloměr konvergence roven  $R_1$  a mocninná řada  $\sum b_n x^n$  má poloměr konvergence roven  $R_2$ . Co můžeme říct o poloměru konvergence mocninné řady  $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n) x^n$ ?

**Řešení:** Platí, že  $R \geq \min\{R_1, R_2\}$ .

- Uvažujme  $x$  takové, že  $|x| < \min\{R_1, R_2\}$ . Pak obě řady konvergují absolutně a z linearity řad máme:

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n + b_n x^n| \leq \sum_{n=1}^{\infty} |a_n| \cdot |x|^n + |b_n| \cdot |x|^n = \sum_{n=1}^{\infty} |a_n| \cdot |x|^n + \sum_{n=1}^{\infty} |b_n| \cdot |x|^n < \infty.$$

- Jestliže  $R_1 < R_2$ , tak dokonce  $R = R_1$ .

Uvažujme  $x$  takové, že  $R_1 < |x| < R_2$ . Pak z linearity konvergence řad máme

$$\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n)x^n = \sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n + \sum_{n=1}^{\infty} b_n x^n,$$

což je konvergentní plus divergentní řada, tedy dohromady divergentní.

Protože i  $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n)x^n$  je mocninná řada, pro  $x: |x| \geq R_2$  plyne divergence z předchozího.

- Jestliže  $R_1 = R_2$ , může být i  $R > R_1$ .

Např.

- (a)  $a_n = 1, b_n = -1, R = \infty$
- (b)  $a_n = 1, b_n = 1, R = 1 = R_1$
- (c)  $a_n = 1 + 2^{-n}, b_n = -1, R = 2, 1 = R_1$