5. cvičení – Derivace a řady funkcí, Poloměr mocninné řady

https://www2.karlin.mff.cuni.cz/~kuncova/vyuka.php, kuncova@karlin.mff.cuni.cz

Teorie

Věta 1 (Záměna sumy a derivace)**.** Nechť (a, b) je omezený neprázdný interval a $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ je řada reálných funkcí splňující:

1. f_n má vlastní derivaci na (a, b),
2. existuje $x_0 \in (a, b)$ takové $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x_0)$ konverguje,
3. řada $\sum_{n=1}^{\infty} f'_n$ konverguje stejnoměrně na (a, b).

Pak řada $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ konverguje stejnoměrně na (a, b) a pro každé $x \in (a, b)$ platí

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty} f_n\right)'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f'_n(x).$$

Příklady

1. (a) Spočtěte $f'(0)$ (vyjádřete jako řadu):

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\sin\left(1 + \frac{x}{n}\right)}{\sqrt{n}}$$

(b) Spočtěte derivaci funkce (vyjádřete jako řadu):

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{2^n}$$

(c)❀ Dokažte, že pro Riemannovu zeta funkci

$$\zeta(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^x}$$

platí $\zeta \in C^1(1, \infty)$.

Zkouškové příklady

2. Uvažujte funkci

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-x^2 + 6x - 8)^n.$$

(a) Určete, pro která x je f definována.

(b)❄ Dokažte, že funkce f je spojitá v bodě $7/2$.

(c)✿ Dokažte, že funkce f má vlastní derivaci v bodě $7/2$ a vyjádřete $f'(7/2)$ jako součet číselné řady.

Mocninné řady - poloměr konvergence

Teorie

Definice 2. *Mocninnou řadou o středu* $x_0 \in \mathbb{R}$ rozumíme řadu $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$, kde $x \in \mathbb{R}$ a $a_n \in \mathbb{R}$ pro $n \in \mathbb{N}_0$.

Věta 3 (Poloměr konvergence)**.** Nechť $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$ je mocninná řada. Pak existuje právě jeden nezáporný prvek $R \in \mathbb{R}^*$ takový, že

- pro každé $x \in \mathbb{R}$, $|x-x_0| < R$, uvedená řada konverguje absolutně,
- pro každé $x \in \mathbb{R}$, $|x-x_0| > R$, uvedená řada diverguje.

Prvek R splňuje

$$R = \frac{1}{\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}},$$

kde výrazem $1/0$ zde rozumíme $+\infty$ a výrazem $1/\infty$ zde rozumíme 0. Prvek R nazýváme *poloměrem konvergence* uvedené řady.

Věta 4. Nechť $\{a_n\}$ je posloupnost s **kladnými** členy, splňující podmínku

$$\lim_{k\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = A.$$

Pak také

$$\lim_{k\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = A.$$

Věta 5. Nechť $\{a_n\}$ je reálná posloupnost, jejíž všechny členy jsou **kladné**. Nechť dále platí, že

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} < 1.$$

Potom platí, že

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = 0.$$

Fakta

Nechť $a > 0$, pak:

(a) $\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{a} = 1$

(b) $\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{n} = 1$

(c) $\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{n^a} = 1$

(d) $\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{n!} = +\infty$

(e) $\lim_{n\to+\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e$

Hint

$$a^b = e^{b\ln a}$$

$$n!! = n(n-2)(n-4)\cdots$$

$$\frac{(2n)!!}{(2n+1)!!} > \frac{1}{2n+1}, \qquad \frac{(2n)!!}{(2n+1)!!} < \frac{1}{\sqrt{2n+2}}.$$

Příklady

3. Určete poloměr konvergence mocninných řad a konvergenci (i absolutní) na hranici.

(a) $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha^{n^2} \cdot x^n$, kde $(0 < \alpha < 1)$

(b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^p}$, kde $p \in \mathbb{R}$.

(c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{a^{n^2}} \cdot x^n$, kde $(a > 1)$

(d) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n + (-2)^n}{n} (x+1)^n$

(e)✻ $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} x^{n^2}$

(f)❀ $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n)!!}{(2n+1)!!} x^n$

(g)❋ $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(3+(-1)^n)^n}{n} x^n$

(h) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{a^n + b^n}$, kde $a > 0$, $b > 0$.

(i) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^2}{(2n)!} x^n$

(j)✿ $\sum_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n^2} \cdot x^n$

(k) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{a^{\sqrt{n}}}$, kde $a > 0$.

(l) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{a^n}{n} + \frac{b^n}{n^2}\right) \cdot x^n$, kde $a > 0$, $b > 0$.

Bonus

4. Víme, že řada $\sum a_n (x+7)^n$ konverguje pro $x = 0$ a diverguje pro $x = -17$. Co můžeme říct o poloměru konvergence?

5. Víme, že řada $\sum a_n x^n$ konverguje pro $x = -4$ a diverguje pro $x = 7$. Určete, zda jsou následující výroky pravdivé, nepravdivé nebo pravdivost nelze určit:

   (a) Řada konverguje pro $x = 10$.
   (b) Řada konverguje pro $x = 3$.
   (c) Řada diverguje pro $x = 1$.
   (d) Řada diverguje pro $x = 6$.

6. Najděte mocninnou řadu, která:

   (a) diverguje pro $x = 0$;
   (b) konverguje pro $x = 5$, ale nikde jinde;
   (c) má střed konvergence v 0, poloměr konvergence roven 2 a konverguje pro 2, ale diverguje pro -2.

7. Nechť mocninná řada $\sum a_n x^n$ má poloměr konvergence roven R_1 a mocninná řada $\sum b_n x^n$ má poloměr konvergence roven R_2. Co můžeme říct o poloměru konvergence mocninné řady $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n) x^n$?

(1c) řešte na intervalech $(1+\varepsilon, \infty)$
(2bc) řešte na vhodných malých intervalech
(3e) Jak vypadá n-tý člen?
(3f) pro hranici: $\frac{(2n)!!}{(2n+1)!!} > \frac{1}{2n+1}$, $\frac{(2n)!!}{(2n+1)!!} < \frac{1}{\sqrt{2n+2}}$
(3g) Na hranici zkoumejte liché a sudé členy.
(3j) Na hranici otestuje NP (Taylorem nebo L'Hospitalem).