4. cvičení – Posloupnosti a řady funkcí

https://www2.karlin.mff.cuni.cz/~kuncova/vyuka.php, kuncova@karlin.mff.cuni.cz

Příklady

Zdroj většiny příkladů: Petr Holický, Ondřej F.K. Kalenda: Metody řešení vybraných úloh z matematické analýzy pro 2. - 4. semestr

1. Vyšetřete konvergenci funkcí (najděte bodovou limitu a vyšetřete stejnoměrnou konvergenci). Není-li řečeno jinak, vyšetřujte na $\mathbb{R}$.

   (a) $f_n(x) = \dfrac{n^2x^3}{1+n^2x^2}$

   Řešení:

   - Bodová konvergence: zafixujme $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Pak
   $$\lim_{n\to\infty} \frac{n^2x^3}{1+n^2x^2} = \lim_{n\to\infty} \frac{x^2n^2}{x^2n^2} \cdot \frac{x}{\frac{1}{n^2x^2}+1} = x.$$
   Pro $x = 0$ máme $f_n(0) = 0$, tedy i $\lim_{n\to\infty} f_n(0) = 0$.
   Dohromady, $f = x$.
   - Stejnoměrná konvergence: Zafixujme $n \in \mathbb{N}$ a hledejme
   $$\sigma_n = \sup\{|f_n(x) - f(x)|, x \in \mathbb{R}\}.$$
   Odhadujeme tedy výraz
   $$\left|\frac{n^2x^3}{1+n^2x^2} - x\right|$$
   Zkusíme najít extrémy pomocí derivace, tedy
   $$\left(\frac{n^2x^3}{1+n^2x^2} - x\right)' = -\frac{1-n^2x^2}{(1+n^2x^2)^2}$$
   Nulové body:
   $$x^2 = \frac{1}{n^2},$$
   tedy $x = \pm\frac{1}{n}$. Platí
   $$(f_n - f)\left(\pm\frac{1}{n}\right) = \pm\frac{1}{2n}.$$
   Supremum ještě můžeme hledat v nekonečnech, tedy zkoumáme
   $$\lim_{x\to\infty} |f_n(x) - f(x)| = \lim_{x\to\infty} \left|\frac{n^2x^3}{1+n^2x^2} - x\right| = 0.$$
   Dohromady máme
   $$\sigma_n = \frac{1}{4n}.$$
   Navíc platí
   $$\lim_{n\to\infty} \sigma_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{4n} = 0.$$

Z kritéria stejnoměrné konvergence pak plyne, že

$$f_n \rightrightarrows f.$$

na $\mathbb{R}$.

(b) $f_n(x) = nx(1-x)^n$ na $[0,1]$

Řešení:

- Bodová konvergence: zafixujme $x \in [0,1]$. Pak z růstové škály

$$\lim_{n\to\infty} nx(1-x)^n = 0.$$

Tedy, $f = 0$.

- Stejnoměrná konvergence: Zafixujme $n \in \mathbb{N}$ a hledejme

$$\sigma_n = \sup\{|f_n(x) - f(x)|, x \in \mathbb{R}\}.$$

Odhadujeme tedy výraz

$$|nx(1-x)^n|.$$

Zkusíme najít extrémy pomocí derivace, tedy

$$(nx(1-x)^n)' = n(1-x)^n - n^2x(1-x)^{n-1}.$$

Nulové body:

$$x = \frac{1}{n+1}.$$

Platí

$$(f_n - f)\left(\frac{1}{n+1}\right) = \left(\frac{n}{n+1}\right)^{n+1}$$

Supremum ještě můžeme hledat v krajních bodech, tedy zkoumáme

$$|f_n(x) - f(x)|(0) = |f_n(x) - f(x)|(1) = 0$$

Dohromady máme

$$\sigma_n = \left(\frac{n}{n+1}\right)^{n+1}$$

Navíc platí

$$\lim_{n\to\infty} \sigma_n = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n}{n+1}\right)^{n+1} = \frac{1}{e}.$$

Z kritéria stejnoměrné konvergence pak plyne, že

$$f_n \not\rightrightarrows f.$$

na $[0,1]$.

(c) $f_n(x) = x^n - x^{n+1}$

Řešení:

- Bodová konvergence: Rozepišme funkce jako $f_n(x) = x^n(1-x)$. Pak pro $x \in (-\infty, -1] \cup (1, \infty)$ posloupnost $f_n(x)$ diverguje.
Pro $x \in (-1, 1]$ máme
$$\lim_{n\to\infty} x^n(1-x) = 0.$$
Tedy, $f = 0$ pro $x \in (-1, 1]$.
- Stejnoměrná konvergence: Zafixujme $n \in \mathbb{N}$ a hledejme
$$\sigma_n = \sup\{|f_n(x) - f(x)|, x \in \mathbb{R}\}.$$
Odhadujeme tedy výraz
$$|x^n(1-x)|.$$
Přímo vidíme, že v krajním bodě je
$$\lim_{x\to -1+} |x^n(1-x)| = 2.$$
Supremum tedy můžeme odhadnout
$$\sigma_n \geq 2.$$
Tedy
$$\lim_{n\to\infty} \sigma_n \neq 0.$$
Z kritéria stejnoměrné konvergence pak plyne, že
$$f_n \not\rightrightarrows f.$$
na $(-1, 1]$.

(d) $f_n(x) = e^{-\left|x-\frac{1}{n}\right|n^2}$
Řešení:
- Bodová konvergence: zafixujme $x \in \mathbb{R}$. Pak
$$\lim_{n\to\infty} e^{-\left|x-\frac{1}{n}\right|n^2} = 0.$$
Tedy, $f = 0$.
- Stejnoměrná konvergence: Zafixujme $n \in \mathbb{N}$ a hledejme
$$\sigma_n = \sup\{|f_n(x) - f(x)|, x \in \mathbb{R}\}.$$
Odhadujeme tedy výraz
$$\left|e^{-\left|x-\frac{1}{n}\right|n^2}\right|.$$
Lze rovnou dosadit $x = \frac{1}{n}$. Pak
$$\sigma_n \geq \left|e^{-\left|\frac{1}{n}-\frac{1}{n}\right|n^2}\right| = 1.$$
Dále
$$\lim_{n\to\infty} \sigma_n \neq 0.$$
Z kritéria stejnoměrné konvergence pak plyne, že
$$f_n \not\rightrightarrows f.$$
na $\mathbb{R}$.

(e) $f_n(x) = e^{-(nx)^2}$

Řešení:

- Bodová konvergence: zafixujme $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Pak

$$\lim_{n\to\infty} e^{-n^2x^2} = 0.$$

Pro $x = 1$ je $\lim_{n\to\infty} e^{-n^2} = e^0 = 1$. Tedy, $f = \begin{cases} 1, & x = 0 \\ 0, & x \neq 0. \end{cases}$

- Stejnoměrná konvergence: Jednotlivé funkce f_n jsou spojité na $\mathbb{R}$, ale jejich limita spojitá není. Tedy nemohou konvergovat stejnoměrně. Závěr:

$$f_n \not\rightrightarrows f$$

na $\mathbb{R}$.

(f) $f_n(x) = x^{2n} - x^{3n}$

Řešení:

- Bodová konvergence: zafixujme $x \in (0,1)$. Pak z růstové škály

$$\lim_{n\to\infty} x^{2n} - x^{3n} = 0.$$

Tedy, $f = 0$.

- Stejnoměrná konvergence: Zafixujme $n \in \mathbb{N}$ a hledejme

$$\sigma_n = \sup\{|f_n(x) - f(x)|, x \in \mathbb{R}\}.$$

Odhadujeme tedy výraz

$$\left|x^{2n} - x^{3n}\right|$$

Zkusíme najít extrémy pomocí derivace, tedy

$$(x^{2n} - x^{3n})' = nx^{2n-1}(2 - 3x^n).$$

Nulové body:

$$x = \sqrt[n]{\frac{2}{3}}.$$

Platí

$$(f_n - f)\left(\sqrt[n]{\frac{2}{3}}\right) = \left(\frac{2}{3}\right)^2 - \left(\frac{2}{3}\right)^3$$

Pak ale

$$\sigma_n \geq \left(\frac{2}{3}\right)^2 - \left(\frac{2}{3}\right)^3$$

Navíc platí

$$\lim_{n\to\infty} \sigma_n \neq 0$$

Z kritéria stejnoměrné konvergence pak plyne, že

$$f_n \not\rightrightarrows f.$$

na $(0,1)$.

Zkouškové příklady

2. (a) $f_n(x) = \left|\cos \dfrac{x}{n}\right|^n$

Řešení:

- Bodová konvergence: Pro $x = 0$ máme

$$\lim_{n\to\infty} f_n(0) = 1.$$

Zafixujme $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Pak

$$\lim_{n\to\infty} \left|\cos \frac{x}{n}\right|^n = \lim_{n\to\infty} e^{n \log\left|\cos \frac{x}{n}\right|} = e^0 = 1,$$

protože

$$\lim_{n\to\infty} n \log\left|\cos \frac{x}{n}\right| = \lim_{n\to\infty} n \frac{\log\left|\cos \frac{x}{n}\right|}{\left|\cos \frac{x}{n}\right| - 1} \cdot \frac{\left|\cos \frac{x}{n}\right| - 1}{-\frac{x^2}{n^2}} \cdot \frac{-x^2}{n^2} = 0.$$

Dohromady, $f = 1$.

- Stejnoměrná konvergence: Zafixujme $n \in \mathbb{N}$ a hledejme

$$\sigma_n = \sup\{|f_n(x) - f(x)|, x \in \mathbb{R}\}.$$

Odhadujeme tedy výraz

$$\left|\left|\cos \frac{x}{n}\right|^n - 1\right|$$

Zkusme $\frac{x}{n} = \frac{\pi}{2}$, tedy $x = n\frac{\pi}{2}$. Pak $\sigma_n = 1$, tedy

$$\lim_{n\to\infty} \sigma_n \neq 0.$$

Z kritéria stejnoměrné konvergence pak plyne, že

$$f_n \not\rightrightarrows f$$

na $\mathbb{R}$.

(b) $f_n(x) = \dfrac{x+n}{\sqrt{x^2+n^2}}$

Řešení:

- Bodová konvergence: zafixujme $x \in \mathbb{R}$. Pak

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x+n}{\sqrt{x^2+n^2}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{n} \cdot \frac{\frac{x}{n}+1}{\sqrt{\frac{x^2}{n^2}+1}} = 1$$

Dohromady, $f = 1$.

- Stejnoměrná konvergence: Zafixujme $n \in \mathbb{N}$ a hledejme

$$\sigma_n = \sup\{|f_n(x) - f(x)|, x \in \mathbb{R}\}.$$

Odhadujeme tedy výraz
$$\left|\frac{x+n}{\sqrt{x^2+n^2}}-1\right|$$
Zkusíme najít extrémy pomocí derivace, tedy
$$\left(\frac{x+n}{\sqrt{x^2+n^2}}-1\right)'=\frac{n^2-xn}{(x^2+n^2)\sqrt{x^2+n^2}}$$
Nulové body:
$$x=n.$$
Platí
$$(f_n-f)(n)=\frac{2}{\sqrt{2}}-1.$$
Tedy
$$\sigma_n\geq\frac{2}{\sqrt{2}}-1.$$
Navíc platí
$$\lim_{n\to\infty}\sigma_n\neq 0.$$
Z kritéria stejnoměrné konvergence pak plyne, že
$$f_n \not\rightrightarrows f$$
na $\mathbb{R}$.

Příklady

3. Vyšetřete konvergenci řad - zjistěte, pro jaká x řady konvergují (jako řady čísel); na jakém intervalu řady konvergují stejnoměrně; na jakém intervalu je součet řady spojitá funkce?

   (a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} x^n$

   Řešení:

   - Bodová konvergence: Jde o geometrickou řadu, která konverguje právě pro $x\in(-1,1)$.
   - Stejnoměrná konvergence pro $x\in(-1,1)$.
     Z přednášky víme, že $x^n \not\rightrightarrows$ na $(-1,1)$. Tedy řada nesplňuje nutnou podmínku konvergence.
     Závěr: $\sum_{n=1}^{\infty} x^n \not\rightrightarrows$ na $(-1,1)$.

   (b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} x^2e^{-nx}$

   Řešení:

- Bodová konvergence: Pro $x = 0$ zjevně konverguje.
  Pro $x > 0$ máme geometrickou řadu
$$x^2 \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{e^x}\right)^n,$$
  která konverguje.
  Pro $x < 0$ není splněna nutná podmínka konvergence, protože $\lim_{n\to\infty} x^2 e^{-nx} = \infty$.
  Bodově konverguje tedy právě pro $x \in [0, \infty)$.
- Stejnoměrná konvergence: Zafixujme $n \in \mathbb{N}$. Vyšetřujeme
$$\sigma_n = \sup\left\{\left|\frac{x^2}{e^{nx}}\right|, x \in [0, \infty)\right\}.$$
  Extrémy budeme hledat pomocí derivací:
$$\left(\frac{x^2}{e^{nx}}\right)' = xe^{-nx}(2 - nx)$$
  Nulové body: $x = \frac{2}{n}$.
  Krajní body: $f_n(0) = 0$,
$$\lim_{x\to\infty} f_n(x) = 0.$$
  Tedy supremum je
$$\sigma_n = f_n\left(\frac{2}{n}\right) = \frac{4}{n^2 e^2}$$
  Navíc řada $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{n^2 e^2}$ konverguje, tedy
$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n \rightrightarrows$$
  na $x \in [0, \infty)$.
  Protože f_n jsou spojité funkce na $[0, \infty)$, tak dle věty o řadě a spojitosti je tamtéž spojitá i funkce $f = \sum_{n=1}^{\infty} f_n$.

(c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n\sqrt{x}}{n^4 + x^2}$

Řešení:

- Bodová konvergence: Řadu má smysl vyšetřovat jen pro $x \geq 0$. Řada pak konverguje, LSK s $\frac{1}{n^3}$.
- Stejnoměrná konvergence: Zafixujme $n \in \mathbb{N}$. Vyšetřujeme
$$\sigma_n = \sup\left\{\left|\frac{n\sqrt{x}}{n^4 + x^2}\right|, x \in [0, \infty)\right\}.$$
  Extrémy budeme hledat pomocí derivací:
$$\left(\frac{n\sqrt{x}}{n^4 + x^2}\right)' = \frac{n(n^4 - 3x^2)}{2\sqrt{x}(n^4 + x^2)^2}$$

Nulové body: $x = \frac{n^2}{\sqrt{3}}$.
Krajní body: $f_n(0) = 0$,
$$\lim_{x\to\infty} f_n(x) = 0.$$
Tedy supremum je
$$\sigma_n = f_n\left(\frac{n^2}{\sqrt{3}}\right) = \sqrt[4]{27}4n^2$$
Navíc řada $\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt[4]{27}4n^2$ konverguje, tedy
$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n \rightrightarrows$$
na $x \in [0,\infty)$.
Protože f_n jsou spojité funkce na $[0,\infty)$, tak dle věty o řadě a spojitosti je tamtéž spojitá i funkce $f = \sum_{n=1}^{\infty} f_n$.

(d) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{nx}{1+n^5x^2}$

Řešení:

- Bodová konvergence: Řadu vyšetřujeme pro $x \in \mathbb{R}$. Na celém $\mathbb{R}$ řada konverguje (LSK s $\frac{1}{n^4}$, pro $x = 0$ je identicky nulová).
- Stejnoměrná konvergence: Zafixujme $n \in \mathbb{N}$. Vyšetřujeme
$$\sigma_n = \sup\left\{\left|\frac{nx}{1+n^5x^2}\right|, x \in \mathbb{R}\right\}.$$
Extrémy budeme hledat pomocí derivací:
$$\left(\frac{nx}{1+n^5x^2}\right)' = \frac{n(1-n^5x^2)}{(1+n^5x^2)^2}$$
Nulové body: $x = \pm\frac{1}{n^{5/2}}$.
Krajní body:
$$\lim_{x\to\pm\infty} f_n(x) = 0.$$
Tedy supremum je
$$\sigma_n = f_n\left(\frac{1}{n^{5/2}}\right) = \frac{1}{n^{3/2}}.$$
Navíc řada $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{3/2}}$ konverguje, tedy
$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n \rightrightarrows$$
na $x \in \mathbb{R}$.
Protože f_n jsou spojité funkce na $[0,\infty)$, tak dle věty o řadě a spojitosti je tamtéž spojitá i funkce $f = \sum_{n=1}^{\infty} f_n$.

(e) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1+n^2x^2}$

Řešení:

- Bodová konvergence: pro $x = 0$ řada zřejmě diverguje, pro $x \neq 0$ konverguje srovnánímm s $\frac{1}{n^2}$.
- Stejnoměrná konvergence: Zafixujme $n \in \mathbb{N}$. Vyšetřujeme

$$\sigma_n = \sup \left\{ \left| \frac{1}{1+n^2x^2} \right|, x \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \right\}.$$

Pro bod $x = \frac{1}{n}$ máme

$$\sigma_n \geq f_n \left(\frac{1}{n} \right) = \frac{1}{2}.$$

Ale $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2} = \infty$, tedy nevíme nic.
Zkusíme vyšetřit nutnou podmínku. Máme $f_n \to 0$. Ale $\sigma_n = \frac{1}{2} \not\to 0$, tedy není splněna nutná podmínka konvergence a řada

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n \not\rightrightarrows .$$

(f) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(n^2x)}{n^2}$

Řešení:

- Bodová konvergence: pro $x \in \mathbb{R}$ máme

$$\left| \frac{\sin(n^2x)}{n^2} \right| \leq \frac{1}{n^2}.$$

- Stejnoměrná konvergence Stejně tak lze odhadnout supremum

$$\sigma_n \leq \frac{1}{n^2}.$$

Protože $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ konverguje, tak

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n \rightrightarrows .$$

4. (a) Spočtěte $f'(0)$ (vyjádřete jako řadu):

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\sin\left(1+\frac{x}{n}\right)}{\sqrt{n}}$$

Řešení: Aplikujeme větu o záměně sumy a derivace. Ověřujeme tedy tři podmínky.

- f_n má vlastní derivaci na $\mathbb{R}$:

$$f_n' = (-1)^n \frac{\cos(1+\frac{x}{n})}{n\sqrt{n}}$$

- existuje $x_0 \in (a,b)$ takové $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x_0)$ konverguje: Pro $x = 0$ máme
$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\sin 1}{\sqrt{n}}$$
konverguje dle Leibnize.
- řada $\sum_{n=1}^{\infty} f_n'$ konverguje stejnoměrně na $\mathbb{R}$: Máme odhad
$$|f_n'| = \left| (-1)^n \frac{\cos(1+\frac{x}{n})}{n\sqrt{n}} \right| \leq \frac{1}{n^{3/2}}$$
a $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{3/2}}$ konverguje.

Tedy můžeme prohodit řadu a derivaci a dostaneme
$$f'(0) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\cos 1}{n\sqrt{n}}.$$

(b) Spočtěte derivaci funkce (vyjádřete jako řadu):
$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{2^n}$$

Řešení: Aplikujeme větu o záměně sumy a derivace. Ověřujeme tedy tři podmínky.
- f_n má vlastní derivaci na $\mathbb{R}$:
$$f_n' = \frac{n \cos nx}{2^n}$$
- existuje $x_0 \in (a,b)$ takové $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x_0)$ konverguje: Pro $x = 0$ máme
$$\sum_{n=1}^{\infty} 0$$
konverguje.
- řada $\sum_{n=1}^{\infty} f_n'$ konverguje stejnoměrně na $\mathbb{R}$: Máme odhad
$$|f_n'| = \left| \frac{n \cos nx}{2^n} \right| \leq \frac{n}{2^n}$$
a $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n}$ konverguje z limitního podílového kritéria.

Tedy můžeme prohodit řadu a derivaci a dostaneme
$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n \cos nx}{2^n}$$

(c) Dokažte, že pro Riemannovu zeta funkci
$$\zeta(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^x}$$
platí $\zeta \in C^1(1, \infty)$.

Řešení: Řada konverguje právě pro $x \in (1, \infty)$. Tam budeme řadu vyšetřovat. Aplikujeme větu o záměně sumy a derivace. Ověřujeme tedy tři podmínky.

- f_n má vlastní derivaci na $(1, \infty)$:

$$f_n' = -\frac{\log n}{n^x}$$

- existuje $x_0 \in (1, \infty)$ takové $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x_0)$ konverguje: Pro $x = 2$ máme

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$$

  konverguje.
- řada $\sum_{n=1}^{\infty} f_n'$ konverguje stejnoměrně na $(1+\varepsilon, \infty)$. Máme odhad

$$|f_n'| = \left| \frac{-\log n}{n^x} \right| \le \frac{\log n}{n^{1+\varepsilon}}$$

  a $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{-\log n}{n^{1+\varepsilon}}$ konverguje.

Z vět o derivaci a spojitosti dostaneme, že $\zeta(x) \in \mathcal{C}^1(1+\varepsilon, \infty)$.
Proces lze zopakovat pro každé $\varepsilon > 0$ a tedy $\zeta(x) \in \mathcal{C}^1(1, \infty)$.

5. Uvažujte funkci

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-x^2 + 6x - 8)^n.$$

(a) Určete, pro která x je f definována.
Řešení: jde o geometrickou řadu, tedy potřebujeme

$$-1 < -x^2 + 6x - 8 < 1$$

Po vyřešení kvadratických nerovnic vyjde $x \in (3 - \sqrt{2}, 3) \cup (3, 4 + \sqrt{2})$.

(b) Dokažte, že funkce f je spojitá v bodě $7/2$.
Řešení: Potřebujeme ukázat spojitost f na nějakém okolí bodu $3,5$. Uvažujme $U = (3,3; 3,7)$. f_n jsou tam zjevně spojité. Pokud $\sum_{n=1}^{\infty} f_n \rightrightarrows$, tak bude spojitá i f.
Aplikujeme Weierstrassovo kritérium. Tedy fixujme $n \in \mathbb{N}$ a hledejme

$$\sigma_n = \sup\{|f_n| : x \in U\}$$

Z tvaru f_n plyne, že

$$\sigma_n = 0,91^n.$$

Protože geometrická řada $\sum_{n=1}^{\infty} 0,91^n$ konverguje, tak $\sum_{n=1}^{\infty} f_n \rightrightarrows$ a tedy je f spojitá na U.

(c) Dokažte, že funkce f má vlastní derivaci v bodě $7/2$ a vyjádřete $f'(7/2)$ jako součet číselné řady.
Aplikujeme větu o záměně derivace a řady.

- f_n jsou diferencovatelné na U - jsou to polynomy.
- $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(4) = \sum_{n=1}^{\infty} 0$ konverguje.

- Vyšetřeme $\sum_{n=1}^{\infty} f_n'$.

$$f_n' = n(-x^2 + 6x - 8)^{n-1}(-2x + 6)$$

Zafixujme $n \in \mathbb{N}$. Pak

$$\sigma_n = \sup\{|n(-x^2 + 6x - 8)^{n-1}(-2x + 6)| : x \in U\} \leq |n(0,91)^{n-1}(-1,4)|$$

Máme

$$\sum_{n=1}^{\infty} |n(0,91)^{n-1}(-1,4)| < \infty$$

z d'Alambertova kritéria.
Tedy $\sum_{n=1}^{\infty} f_n' \rightrightarrows$.
Z věty plyne

$$f'(7/2) = \sum_{n=1}^{\infty} n \left(\frac{3}{4}\right)^{n-1} \cdot (-1)$$