4. cvičení – Posloupnosti a řady funkcí

https://www2.karlin.mff.cuni.cz/~kuncova/vyuka.php, kuncova@karlin.mff.cuni.cz

Posloupnosti funkcí

Definice 1. Nechť $M \subset \mathbb{R}$ je interval a $f, f_n : M \to \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$, jsou funkce. Řekneme, že posloupnost $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ *konverguje bodově* k funkci f na M, jestliže

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$$

pro každé $x \in M$, neboli

$$\forall x \in M\, \forall \varepsilon > 0\, \exists n_0 \in \mathbb{N}\, \forall n \geq n_0 : |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon.$$

Značíme $f_n \to f$.

Řekneme, že posloupnost $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ *konverguje stejnoměrně* k funkci f na M, jestliže

$$\forall \varepsilon > 0\, \exists n_0 \in \mathbb{N}\, \forall x \in M\, \forall n \geq n_0 : |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon.$$

Značíme $f_n \rightrightarrows f$.

Poznámka 2. Jestliže $f_n \rightrightarrows f$, pak $f_n \to f$ na M.

Věta 3 (Charakterizace stejnoměrné konvergence)**.** Nechť $M \subset \mathbb{R}$ je interval a $f, f_n : M \to \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$, jsou funkce. Pak

$$f_n \rightrightarrows f$$

právě tehdy, když

$$\lim_{n\to\infty} \sup\{|f_n(x) - f(x)| : x \in M\} = 0.$$

Věta 4 (Stejnoměrná konvergence a spojitost.)**.** Nechť $M \subset \mathbb{R}$ je interval a $f, f_n : M \to \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$, kde f_n jsou **spojité** funkce. Nechť navíc $f_n \rightrightarrows f$ na M. Pak f je také **spojitá** na M.

Algoritmus

1. Určíme **bodovou limitu**: **zafixujeme** x a spočteme $f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x)$. (Dáváme pozor na parametr.) Funkci $f(x)$ použijeme v dalším postupu. Určíme i **interval** I, kde posloupnost konverguje.
2. Zkusíme test na stejnoměrnou konvergenci.
   (a) **Zafixujeme** n a hledáme $\sigma_n := \sup |f_n(x) - f(x)|$. Lze použít nějaké odhady nebo vyšetřit extrémy dané funkce (třeba pomocí první derivace). Supremum se pak může realizovat v bodech maxima i **minima** $f_n - f$ nebo v **krajních bodech** vč. $\pm\infty$.
   (b) Pak spočteme $\lim_{n\to\infty} \sigma_n$. Stejnoměrnou konvergenci máme právě tehdy, když limita vyjde 0.
3. Stejnoměrnou konvergenci lze **vyvrátit**, pakliže f_n jsou **spojité**, ale f **není**.
4. Napíšeme závěr.

Příklady

Zdroj většiny příkladů: Petr Holický, Ondřej F.K. Kalenda: Metody řešení vybraných úloh z matematické analýzy pro 2. - 4. semestr

1. Vyšetřete konvergenci posloupnosti funkcí (najděte bodovou limitu a vyšetřete stejnoměrnou konvergenci). Není-li řečeno jinak, vyšetřujte na $\mathbb{R}$.

   (a) $f_n(x) = \dfrac{n^2x^3}{1+n^2x^2}$

   (b) $f_n(x) = nx(1-x)^n$ na $[0,1]$

   (c) $f_n(x) = x^n - x^{n+1}$

   (d)❀ $f_n(x) = e^{-\left|x-\frac{1}{n}\right|n^2}$

   (e)✶ $f_n(x) = e^{-(nx)^2}$

   (f) $f_n(x) = x^{2n} - x^{3n}$ na $(0,1)$

   Zkouškové příklady

2. (a) $f_n(x) = \left|\cos\dfrac{x}{n}\right|^n$ (b) $f_n(x) = \dfrac{x+n}{\sqrt{x^2+n^2}}$

Řady funkcí

Definice 5. Nechť $M \subset \mathbb{R}$ je interval a $f_n : M \to \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$, jsou funkce. Řekneme, že řada funkcí $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ je *bodově konvergentní* na M, jestliže posloupnost funkcí $\{\sum_{k=1}^{m} f_k\}_{m=1}^{\infty}$ je bodově konvergentní na M.

Pojem *stejnoměrné* konvergence řady $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ se definuje analogicky.

Věta 6 (Weierstrassovo kritérium)**.** Nechť $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ je řada reálných funkcí definovaných na neprázdné množině M. Označme

$$\sigma_n := \sup_{x\in M} |f_n(x)|.$$

Jestliže $\sum_{n=1}^{\infty} \sigma_n < \infty$, pak $\sum_{n=1}^{\infty} f_n \rightrightarrows$ na M.

Poznámka 7 (Nutná podmínka konvergence)**.** Pokud $\sum_{n=1}^{\infty} f_n \rightrightarrows$ na M, potom $f_n \rightrightarrows 0$ na M.

Poznámka 8 (Řada a spojitost)**.** Nechť f_n jsou spojité funkce na (a,b). Pokud $\sum_{n=1}^{\infty} f_n \rightrightarrows$ na (a,b), potom její součet je spojitá funkce na (a,b).

Algoritmus

1. Určíme bodovou konvergenci: **zafixujeme** x a vyšetříme $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$. (Kritéria k obyčejným řadám - LSK, SK, Cauchy, d'Alambert, Leibniz, Abel-Dirichlet. Dáváme pozor na parametr.) Tím získáme i definiční obor.
2. Zkusíme Weierstrassovu větu:
   (a) **Zafixujeme** n a hledáme $\sigma_n := \sup |f_n(x)|$.
   Je to stejné jako u posloupností: Lze použít nějaké odhady nebo vyšetřit extrémy dané funkce (třeba pomocí první derivace). Supremum se pak může realizovat v bodech **maxima** i **minima** $f_n - f$ nebo v **krajních bodech** vč. $\pm\infty$.

(b) Pak vyšetříme $\sum_{n=1}^{\infty} \sigma_n$. Jestliže konverguje, máme stejnoměrnou konvergenci. Jestliže **nekonverguje, nevíme nic**.

(c) Můžeme zkusit i nějaký menší interval, jestli nemáme stejnoměrnou konvergenci alespoň na něm.

3. Stejnoměrnou konvergenci lze vyvrátit:
   (a) Nutnou podmínkou.
   (b) B-C podmínkou.
   (c) Známe-li součet, můžeme použít fakt, že součet spojitých při stejnoměrné konvergenci musí být také spojitá.

Příklady

3. Vyšetřete konvergenci řad funkcí - zjistěte, pro jaká x řady konvergují (jako řady čísel); na jakém intervalu řady konvergují stejnoměrně; na jakém intervalu je součet řady spojitá funkce?

(a)✻ $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} x^n$ (c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n\sqrt{x}}{n^4+x^2}$ (e)♡ $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1+n^2x^2}$

(b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} x^2e^{-nx}$ (d) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{nx}{1+n^5x^2}$ (f) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(n^2x)}{n^2}$

Teorie

Věta 9 (Záměna sumy a derivace)**.** Nechť (a,b) je omezený neprázdný interval a $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ je řada reálných funkcí splňující:

1. f_n má vlastní derivaci na (a,b),
2. existuje $x_0 \in (a,b)$ takové $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x_0)$ konverguje,
3. řada $\sum_{n=1}^{\infty} f_n'$ konverguje stejnoměrně na (a,b).

Pak řada $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ konverguje stejnoměrně na (a,b) a pro každé $x \in (a,b)$ platí

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty} f_n\right)'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n'(x).$$

Příklady

4. (a) Spočtěte $f'(0)$ (vyjádřete jako řadu):

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\sin\left(1+\frac{x}{n}\right)}{\sqrt{n}}$$

(b) Spočtěte derivaci funkce (vyjádřete jako řadu):

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{2^n}$$

(c)✾ Dokažte, že pro Riemannovu zeta funkci

$$\zeta(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^x}$$

platí $\zeta \in C^1(1, \infty)$.

Zkouškové příklady

5. Uvažujte funkci

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-x^2 + 6x - 8)^n.$$

(a) Určete, pro která x je f definována.

(b)❄ Dokažte, že funkce f je spojitá v bodě $7/2$.

(c)✿ Dokažte, že funkce f má vlastní derivaci v bodě $7/2$ a vyjádřete $f'(7/2)$ jako součet číselné řady.

(1d) testujte $x = \frac{1}{n}$
(1e) testujte spojitost
(3a) NP
(3e) testujte $x = \frac{1}{n}$, pak NP
(4c) řešte na intervalech $(1+\varepsilon, \infty)$
(5bc) řešte na vhodných malých intervalech