2) Úlohu můžeme také řešit jednoznačným vyjádřením proměnné y z rovnice vazby $x^2 - y = 0$. Tím získáváme $y = x^2$, které dosadíme do zadané funkce $f(x, y) = 4 \ln y - x$, dostaneme funkci jedné proměnné

$$F(x) = 4 \ln x^2 - x.$$

Zadanou úlohu jsme tedy převedli na úlohu hledání extrémů funkce jedné proměnné. Platí

$$F'(x) = \frac{8}{x} - 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad x = 8.$$

Spočtením druhé derivace $F''(x) = -\frac{8}{x^2}$ a dosazením bodu $x = 8$ získáváme hodnotu $F''(8) = -\frac{1}{8} < 0$. Protože je druhá derivace v bodě $x = 8$ záporná, má funkce F v tomto bodě lokální maximum. Dopočítáme $y = 64$. Odtud funkce $f(x, y) = 4 \ln y - x$ má v bodě $[8, 64]$ vázané lokální maximum.

1a

Příklad 9.6. Najděte lokální extrémy funkce $f(x, y) = x^2 + y$ na množině určené rovnicí $x^2 + y^2 = 1$.

Řešení. Úlohu budeme řešit třemi způsoby.
1) Metoda Lagrangeových multiplikátorů. Vazba je $g(x, y) = x^2 + y^2 - 1 = 0$. Matice $G = (\frac{\partial g}{\partial x}, \frac{\partial g}{\partial y}) = (2x, 2y)$ má hodnost 1. Hodnost této matice by byla nulová pouze v případě, že $x = y = 0$. Tyto hodnoty však nevyhovují vazebné podmínce. Sestavíme Lagrangeovu funkci

$$L(x, y, \lambda) = x^2 + y + \lambda(x^2 + y^2 - 1),$$

spočteme její parciální derivace podle proměnných x, y a položíme je rovny nule,

$$\begin{aligned} L_x &= 2x + 2x\lambda = 0 \quad \Rightarrow \quad 2x(1 + \lambda) = 0 \quad \Rightarrow x = 0 \ \vee \ \lambda = -1 \\ L_y &= 1 + 2y\lambda = 0 \quad \Rightarrow \quad 2y\lambda = -1 \quad \Rightarrow y = -\frac{1}{2\lambda} \end{aligned}$$

Do rovnice vazby $g(x, y) = x^2 + y^2 - 1 = 0$ dosadíme nejdříve $x = 0$ a dostáváme $y = \pm 1$. Máme tedy stacionární body $x_1^* = [0, 1]$ s příslušnou hodnotou $\lambda_1 = -\frac{1}{2}$ a $x_2^* = [0, -1]$ s hodnotou $\lambda_2 = \frac{1}{2}$. Dále do rovnice vazby $g(x, y) = x^2 + y^2 - 1 = 0$ dosadíme za $y = -\frac{1}{2\lambda}$ a $\lambda = -1$. Dostaneme $x = \pm\frac{\sqrt{3}}{2}$. Získali jsme další dva stacionární body $x_3^* = [\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}]$, $x_4^* = [-\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}]$

pro hodnotu $\lambda = \lambda_3 = \lambda_4 = -1$.
Sestavíme matici druhých parciálních derivací Lagrangeovy funkce L:

$$L'' = \begin{pmatrix} L_{xx} & L_{xy} \\ L_{yx} & L_{yy} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2+2\lambda & 0 \\ 0 & 2\lambda \end{pmatrix}.$$

Dosadíme do L'' stacionární body a příslušné hodnoty λ:

$$\lambda_1 = -\frac{1}{2}, \quad L''(x_1^*) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad \lambda_2 = \frac{1}{2}, \quad L''(x_2^*) = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$\lambda_3 = \lambda_4 = -1, \quad L''(x_3^*) = L''(x_4^*) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

Nyní určíme $h = (h_1, h_2)$ splňující podmínku (9.3). Nejdříve vyšetříme body $x_1^* = [0, 1]$ a $x_2^* = [0, -1]$. Dostáváme $G(x_1^*) = (0, 2) = -G(x_2^*)$ a

$$\langle G(x_1^*), h\rangle = 2h_2 = 0 \quad \Rightarrow \quad h_2 = 0, \text{ tj. } h = (t, 0),\ t \in \mathbb{R}.$$

Pro x_2^* má h splňující podmínku (9.3) stejný tvar. Tedy

$$\langle L''(x_1^*)h, h\rangle = (t, 0) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t \\ 0 \end{pmatrix} = t^2 > 0 \quad \text{pro } t \neq 0.$$

V bodě x_1^* je podle věty 9.3 lokální minimum.
Podobně pro bod x_2^*.

$$\langle L''(x_2^*)h, h\rangle = (t, 0) \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t \\ 0 \end{pmatrix} = 3t^2 > 0 \quad \text{pro } t \neq 0.$$

V bodě x_2^* je podle věty 9.3 lokální minimum.
Dále vyšetříme bod $x_3^* = [\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}]$. Dostáváme $G(x_3^*) = (\sqrt{3}, 1)$ a

$$\langle G(x_3^*), h\rangle = \sqrt{3}h_1 + h_2 = 0 \quad \Rightarrow \quad h_2 = -\sqrt{3}h_1, \quad \text{tj. } h = \big(t, -\sqrt{3}t\big),\ t \in \mathbb{R}.$$

Tedy

$$\langle L''(x_3^*)h, h\rangle = \big(t, -\sqrt{3}t\big) \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t \\ -\sqrt{3}t \end{pmatrix} = -6t^2 < 0 \quad \text{pro } t \neq 0.$$

V bodě x_3^* je podle věty 9.3 lokální maximum.
Podobně pro bod $x_4^* = [-\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}]$. $G(x_4^*) = (-\sqrt{3}, 1)$ a

$$\langle G(x_4^*), h\rangle = \sqrt{3}h_1 + h_2 = 0 \quad \Rightarrow \quad h_2 = \sqrt{3}h_1, \quad \text{tj. } h = \big(t, \sqrt{3}t\big),\ t \in \mathbb{R}.$$

Tedy

$$\langle L''(x_4^*)h, h\rangle = \left(t, \sqrt{3}t\right) \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t \\ \sqrt{3}t \end{pmatrix} = -6t^2 < 0 \quad \text{pro } t \neq 0.$$

V bodě x_4^* je podle věty 9.3 lokální maximum.

2) Jiný způsob řešení úlohy spočívá v jednoznačném vyjádření proměnné y z vazby $g(x, y) = x^2 + y^2 - 1 = 0$, tj. $y = \pm\sqrt{1 - x^2}$. Úloha se tedy rozpadá na dvě části.
(1) Budeme uvažovat $y = \sqrt{1 - x^2}$. Tento vztah dosadíme do zadané funkce $f(x, y) = x^2 + y$ a dostaneme funkci jedné proměnné

$$F(x) = f(x, \sqrt{1 - x^2}) = x^2 + \sqrt{1 - x^2}.$$

Nyní hledáme extrém funkce jedné proměnné $F(x)$:

$$F'(x) = 2x - \frac{x}{\sqrt{1 - x^2}} = 0 \;\; \Rightarrow x_1 = 0,\;\; x_2 = \frac{\sqrt{3}}{2},\;\; x_3 = -\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Do druhé derivace

$$F''(x) = 2 - \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}} - \frac{x^2}{\sqrt{(1 - x^2)^3}} = 2 - \frac{1}{\sqrt{(1 - x^2)^3}}$$

postupně dosadíme stacionární body. Tedy dostáváme

$$\begin{aligned}
x_1 = 0 \quad &\Rightarrow \quad F''(0) = 1 > 0 \Rightarrow \text{lokální minimum}, \\
&\rightarrow \quad \text{dopočteme } y = 1 \Rightarrow [0, 1] \text{ vázané lokální minimum}, \\
x_2 = \frac{\sqrt{3}}{2} \quad &\Rightarrow \quad F''(\frac{\sqrt{3}}{2}) = -6 < 0 \Rightarrow \text{lokální maximum}, \\
&\rightarrow \quad \text{dopočteme } y = \tfrac{1}{2} \Rightarrow [\tfrac{\sqrt{3}}{2}, \tfrac{1}{2}] \text{ vázané lokální maximum}, \\
x_3 = -\frac{\sqrt{3}}{2} \quad &\Rightarrow \quad F''(-\frac{\sqrt{3}}{2}) = -6 < 0 \Rightarrow \text{lokální maximum}, \\
&\rightarrow \quad \text{dopočteme } y = \tfrac{1}{2} \Rightarrow [-\tfrac{\sqrt{3}}{2}, \tfrac{1}{2}] \text{ vázané lokální maximum}.
\end{aligned}$$

(2) Budeme uvažovat $y = -\sqrt{1 - x^2}$. Vztah dosadíme do zadané funkce $f(x, y) = x^2 + y$ a dostaneme funkci jedné proměnné

$$F(x) = f(x, -\sqrt{1 - x^2}) = x^2 - \sqrt{1 - x^2}.$$

Hledáme extrém funkce jedné proměnné $F(x)$:

$$F'(x) = 2x + \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} = 0 \quad \Rightarrow x\left(2 + \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\right) = 0 \ \Rightarrow x_4 = 0.$$

Do druhé derivace

$$F''(x) = 2 + \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} + \frac{x^2}{\sqrt{(1-x^2)^3}} = 2 + \frac{1}{\sqrt{(1-x^2)^3}}$$

dosadíme za x bod $x_4 = 0$. Dostáváme $F''(0) = 1 > 0$, tedy jedná se o lokální minimum. Dopočteme $y = -1$. Odtud zadaná funkce f má v bodě $[0, -1]$ vázané lokální minimum.

3) Další možností jak úlohu řešit je pomocí parametrizace. Vazba je jednotková kružnice, tudíž můžeme pro parametrizaci použít polární souřadnice s poloměrem $r = 1$, pak $x = \cos t$, $y = \sin t$ pro $t \in (0, 2\pi]$. Polární souřadnice dosadíme do zadané funkce f a dostaneme funkci jedné proměnné

$$F(t) = f(\cos t, \sin t) = \cos^2 t + \sin t.$$

Ve výpočtu pokračujeme dál jako při hledání extrémů funkce jedné proměnné.

$$F' = -2\cos t \sin t + \cos t = 0 \ \Rightarrow \cos t = 0 \ \vee \ \sin t = \frac{1}{2}.$$

Z první rovnosti $\cos t = 0$ dostáváme stacionární body $t_1 = \frac{\pi}{2}$, $t_2 = \frac{3\pi}{2}$. Z druhé rovnosti $\sin t = \frac{1}{2}$ máme stacionární body $t_3 = \frac{\pi}{6}$, $t_4 = \frac{5\pi}{6}$. Tyto body nyní dosadíme do druhé derivace

$$F''(t) = 2\sin^2 t - 2\cos^2 t - \sin t.$$

Tedy v bodě

$$\begin{aligned}
t_1 = \frac{\pi}{2} \quad &\Rightarrow \quad F''(t_1) = 1 > 0 \Rightarrow \text{lokální minimum},\\
t_2 = \frac{3\pi}{2} \quad &\Rightarrow \quad F''(t_2) = 3 > 0 \Rightarrow \text{lokální minimum},\\
t_3 = \frac{\pi}{6} \quad &\Rightarrow \quad F''(t_3) = -\frac{3}{2} < 0 \Rightarrow \text{lokální maximum},\\
t_4 = \frac{5\pi}{6} \quad &\Rightarrow \quad F''(t_3) = -\frac{3}{2} < 0 \Rightarrow \text{lokální maximum}.
\end{aligned}$$

Parametrizací se vrátíme zpět k proměnným x, y a dostáváme

$$\begin{aligned}
t_1 = \frac{\pi}{2} \quad &\Rightarrow \quad x = \cos t_1 = 0, \ \ y = \sin t_1 = 1, \\
&\Rightarrow \quad [0,1] \text{ vázané lokální minimum}, \\
t_2 = \frac{3\pi}{2} \quad &\Rightarrow \quad x = \cos t_2 = 0, \ \ y = \sin t_2 = -1, \\
&\Rightarrow \quad [0,-1] \text{ vázané lokální minimum}, \\
t_3 = \frac{\pi}{6} \quad &\Rightarrow \quad x = \cos t_3 = \frac{\sqrt{3}}{2}, \ \ y = \sin t_3 = \frac{1}{2}, \\
&\Rightarrow \quad \left[\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right] \text{ vázané lokální maximum}, \\
t_4 = \frac{5\pi}{6} \quad &\Rightarrow \quad x = \cos t_4 = -\frac{\sqrt{3}}{2}, \ \ y = \sin t_4 = \frac{1}{2}, \\
&\Rightarrow \quad \left[-\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right] \text{ vázané lokální maximum}.
\end{aligned}$$

Příklad 9.7. Najděte lokální extrémy funkce $f(x, y, z) = x - y + 3z$ na množině určené rovnicí $x^2 + y^2 + 4z^2 = 4$.

Řešení. Příklad budeme řešit metodou Lagrangeových multiplikátorů s vazbou $g(x, y, z) = x^2 + y^2 + 4z^2 - 4 = 0$. Hodnost matice $G = (\frac{\partial g}{\partial x}, \frac{\partial g}{\partial y}, \frac{\partial g}{\partial z}) = (2x, 2y, 8z)$ je různá od 1 pouze v nulovém bodě, který však nevyhovuje vazebné podmínce. Píšeme Lagrangeovu funkci

$$L(x, y, z, \lambda) = x - y + 3z + \lambda(x^2 + y^2 + 4z^2 - 4).$$

Spočteme derivace a položíme je rovny nule,

$$\begin{aligned}
L_x = 1 + 2x\lambda = 0 \quad &\Rightarrow \quad x = -\frac{1}{2\lambda} \\
L_y = -1 + 2y\lambda = 0 \quad &\Rightarrow \quad y = \frac{1}{2\lambda} \\
L_z = 3 + 8z\lambda = 0 \quad &\Rightarrow \quad z = -\frac{3}{8\lambda}.
\end{aligned}$$

Vyjádřené x, y, z dosadíme do rovnice vazby $x^2 + y^2 + 4z^2 = 4$ a dostáváme $\lambda = \pm\frac{\sqrt{17}}{8}$, tj. $\lambda_1 = \frac{\sqrt{17}}{8}$, $\lambda_2 = -\frac{\sqrt{17}}{8}$. Tomu odpovídají stacionární body

platí
$$\langle L''(x^*)h, h\rangle > 0, \tag{9.4}$$
má funkce f v bodě x^* ostré lokální minimum vzhledem k M. Jestliže pro všechna nenulová $h \in \mathbb{R}^n$ splňující podmínku (9.3) platí
$$\langle L''(x^*)h, h\rangle < 0, \tag{9.5}$$
má funkce f v bodě x^* ostré lokální maximum vzhledem k M.

Na základě věty 9.2 a věty 9.3 zformulujeme návod, jak postupovat při hledání vázaných extrémů funkcí se spojitými druhými derivacemi:
1) Zapíšeme vazebné rovnice ve tvaru $g_k(x) = 0$, $k = 1, \dots, m$ a určíme hodnost matice G.
2) Vytvoříme Lagrangeovu funkci L a určíme stacionární body funkce f vzhledem k M.
3) Spočteme druhou derivaci Lagrangeovy fukce L ve stacionárních bodech.
4) Určíme $h \in \mathbb{R}^n$.
5) Vyšetříme definitnost kvadratické formy $\langle L''(x^*)h, h\rangle$.

9.2 Řešené příklady

1b

Příklad 9.4. Najděte lokální extrémy funkce $f(x, y) = 4x + 3y - 4$ na množině M určené rovností $(x-1)^2 + (y-2)^2 = 1$.

Řešení. Úlohu budeme řešit metodou Lagrangeových multiplikátorů s vazbou $g(x, y) = (x-1)^2 + (y-2)^2 - 1 = 0$. Matice $G = (\frac{\partial g}{\partial x}, \frac{\partial g}{\partial y}) = (2x-2, 2y-4)$ má hodnost 1. Hodnost této matice by byla nulová pouze v případě, že
$$2x - 2 = 0 \;\Rightarrow\; x = 1, \quad 2y - 4 = 0 \;\Rightarrow\; y = 2.$$
Bod $[1, 2]$ však nevyhovuje vazebné podmínce. Sestavíme Lagrangeovu funkci
$$L(x, y, \lambda) = 4x + 3y - 4 + \lambda((x-1)^2 + (y-2)^2 - 1),$$
spočteme její parciální derivace podle proměnných x, y a položíme je rovny nule,
$$L_x = 4 + 2\lambda(x-1) = 0 \;\Rightarrow\; x - 1 = -\frac{2}{\lambda}$$
$$L_y = 3 + 2\lambda(y-2) = 0 \;\Rightarrow\; y - 2 = -\frac{3}{2\lambda}.$$

1b

Dosazením vyjádřených hodnot $x - 1$, $y - 2$ do rovnice vazby dostáváme

$$\left(-\frac{2}{\lambda}\right)^2 + \left(-\frac{3}{2\lambda}\right)^2 = 1 \quad \Rightarrow \lambda_1 = -\frac{5}{2}, \quad \lambda_2 = \frac{5}{2}.$$

Pro $\lambda_1 = -\frac{5}{2}$ dopočítáme $x_1 = \frac{9}{5}$, $y_1 = \frac{13}{5}$, dostali jsme tak stacionární bod $x_1^* = [\frac{9}{5}, \frac{13}{5}]$. Pro $\lambda_2 = \frac{5}{2}$ dopočítáme $x_2 = \frac{1}{5}$, $y_2 = \frac{7}{5}$, dostali jsme tak stacionární bod $x_2^* = [\frac{1}{5}, \frac{7}{5}]$.
Sestavíme matici druhých parciálních derivací Lagrangeovy funkce L:

$$L'' = \begin{pmatrix} L_{xx} & L_{xy} \\ L_{yx} & L_{yy} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\lambda & 0 \\ 0 & 2\lambda \end{pmatrix}.$$

Dosadíme do L'' stacionární body a příslušné hodnoty λ:

$$\lambda_1 = -\frac{5}{2}, \quad L''(x_1^*) = \begin{pmatrix} -5 & 0 \\ 0 & -5 \end{pmatrix}, \quad \lambda_2 = \frac{5}{2}, \quad L''(x_2^*) = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}.$$

Nyní určíme $h = (h_1, h_2)$ splňující podmínku (9.3). Pro bod $x_1^* = [\frac{9}{5}, \frac{13}{5}]$ dostáváme $G(x_1^*) = (\frac{8}{5}, \frac{6}{5})$ a

$$\langle G(x_1^*), h\rangle = \left\langle \left(\frac{8}{5}, \frac{6}{5}\right), (h_1, h_2) \right\rangle = \frac{8}{5}h_1 + \frac{6}{5}h_2 = 0 \quad \Rightarrow \quad h_1 = -\frac{3}{4}h_2,$$

tj. $h = \left(-\frac{3}{4}t, t\right)$, $t \in \mathbb{R}$. Tedy

$$\langle L''(x_1^*)h, h\rangle = \left(-\frac{3}{4}t, t\right) \begin{pmatrix} -5 & 0 \\ 0 & -5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\frac{3}{4}t \\ t \end{pmatrix} = -\frac{125}{16}t^2 < 0 \quad \text{pro } t \neq 0.$$

V bodě x_1^* je podle věty 9.3 lokální maximum.
Podobně pro bod $x_2^* = [\frac{1}{5}, \frac{7}{5}]$ dostáváme $G(x_2^*) = (-\frac{8}{5}, -\frac{6}{5})$ a

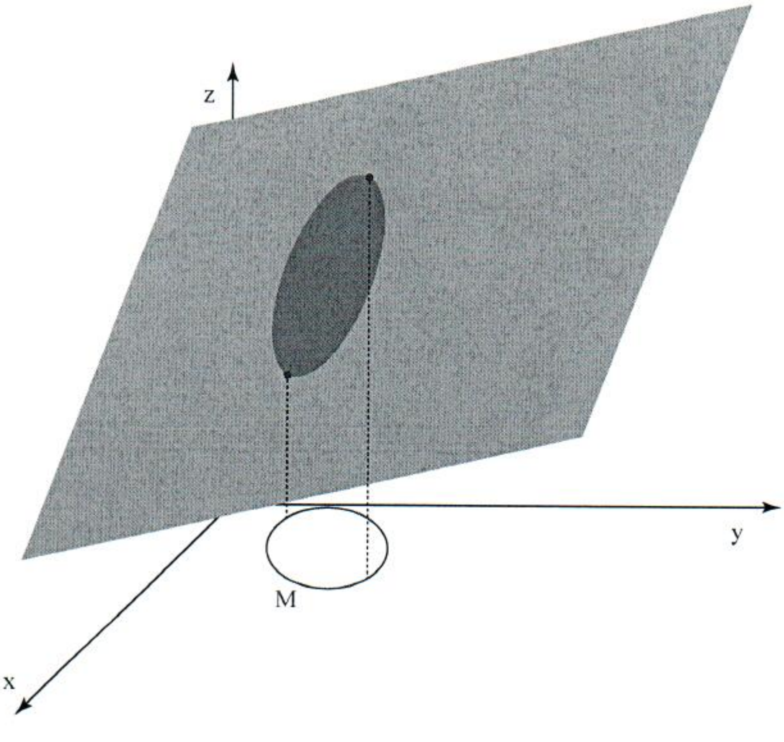
$$\langle G(x_2^*), h\rangle = \left\langle \left(-\frac{8}{5}, -\frac{6}{5}\right), (h_1, h_2) \right\rangle = -\frac{8}{5}h_1 - \frac{6}{5}h_2 = 0 \quad \Rightarrow \quad h_1 = -\frac{3}{4}h_2,$$

tj. $h = \left(-\frac{3}{4}t, t\right)$, $t \in \mathbb{R}$. Tedy

$$\langle L''(x_2^*)h, h\rangle = \left(-\frac{3}{4}t, t\right) \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\frac{3}{4}t \\ t \end{pmatrix} = \frac{125}{16}t^2 > 0 \quad \text{pro } t \neq 0.$$

V bodě x_2^* je podle věty 9.3 lokální minimum.
Vysvětleme si geometrický význam úlohy. Grafem funkce $f(x, y) = 4x+3y-4$

je rovina. Vazebná rovnice $(x-1)^2 + (y-2)^2 = 1$ je rovnice kružnice se středem v bodě $S = [1,2]$, poloměrem $r = 1$ ležící v rovině xy. Hledáme tedy extrémy v bodech kružnice. z-ové souřadnice těchto bodů, tj. funkční hodnoty odpovídající bodům kružnice, leží na křivce, která vznikne průnikem válcové plochy určené touto kružnicí s danou rovinou. Průnikovou křivkou je elipsa. Situace je znázorněna na obrázku 13.



Obrázek 13: Maximum a minimum funkce f na množině M

Příklad 9.5. Určete vázané extrémy funkce $f(x,y) = 4\ln y - x$ vzhledem k podmínce $x^2 = y$.

Řešení. Úlohu vyřešíme dvěma způsoby.

1) Nejdříve úlohu budeme řešit metodou Lagrangeových multiplikátorů s vazbou $g(x,y) = x^2 - y$. Matice $G = (\frac{\partial g}{\partial x}, \frac{\partial g}{\partial y}) = (2x, -1)$ má hodnost 1. Sestavíme

1c

Příklad 13. Zjistěte lokální extrémy funkce $f(x,y) = x^2+y^2$ vzhledem k množině vymezené rovnicí $2x + 6y = 20$.

Řešení. Rovnice $2x + 6y = 20$ je vazební podmínkou, převedeme ji tedy do tvaru $g(x,y) = 0$. Dostaneme

$$2x + 6y - 20 = 0.$$

Nyní vypočítáme gradienty f a g

$$\nabla f(x,y) = (2x, 2y) \quad \text{a} \quad \nabla g(x,y) = (2{,}6).$$

V dalším kroku musíme najít bod $[x_0, y_0]$ pro který platí

$$(2x_0, 2y_0) = \lambda \cdot (2{,}6),$$

tedy

$$2x_0 = \lambda \cdot 2 \quad \text{a} \quad 2y_0 = \lambda \cdot 6.$$

Z první rovnice vyjádříme λ, konkrétně $\lambda = x_0$, dosadíme do druhé rovnice a upravíme.

$$\begin{aligned} 2y_0 &= 6x_0 \\ \Rightarrow\ y_0 &= 3x_0 \end{aligned}$$

Navíc musí bod (x_0, y_0) splňovat $g(x_0, y_0) = 0$, proto

$$\begin{aligned} 2x_0 + 18x_0 - 20 &= 0 \\ \Rightarrow x_0 &= 1 \\ \Rightarrow y_0 &= 3. \end{aligned}$$

Dostali jsme tedy jediný podezřelý bod $[1,3]$.

Podobně bychom mohli nejprve zapsat Lagrangeovu funkci

$$L(x,y) = f(x,y) - \lambda \cdot g(x,y) = x^2 + y^2 - \lambda \cdot (2x + 6y - 20),$$

zjistit její gradient a položit ho rovný nulovému vektoru $\vec{o}$

$$\nabla L(x,y) = (2x - 2\lambda, 2y - 6\lambda) = (0,0).$$

Opět už pouze stačí dopočítat body $[x_0, y_0]$, pro které je rovnost splněna a pro které zároveň platí $g(x_0, y_0) = 0$. Extrém funkce $f(x,y) = x^2 + y^2$ vzhledem k množině vymezené rovnicí $2x + 6y = 20$ může nastávat pouze v bodě $[1,3]$.

Víme již tedy jak pomocí metody Lagrangeových multiplikátorů odhalit body, ve kterých může mít funkce vázaný extrém vzhledem k nějaké množině. Těmto bodům říkáme, podobně jako u funkcí jedné proměnné, body podezřelé z extrému, nebo prostě jen podezřelé body. V odborné literatuře se pak častěji setkáme s pojmem stacionární body. Podeřelé jim říkáme z toho důvodu, že ne v každém takovém bodě extrém skutečně nastává. Už dříve, při vyšetřování absolutních a lokálních extrémů funkce dvou proměnných, jsme si řekli, že pro ověření, zda v podezřelém bodě skutečně extrém nastává, můžeme využít matici druhých parciálních derivací. Podobné to bude i zde. Rozdíl ovšem může nastat v tzv. sedlových bodech. V nich sice funkce dvou proměnných nemá extrém vzhledem ke svému definičnímu oboru, ovšem extrém vzhledem k nějaké množině zde nastat může. Například pokud bychom šli z vrcholku jednoho kopce na vrchol druhého přes sedlový bod, právě v tomto bodě bychom byli v nejnižší nadmořské výšce během naší cesty.

Postačující podmínku existence extrému v jistém bodě si odvodíme v následující části.

sféře v $\mathbb{R}^3$, můžeme z rovnice $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ vypočítat např. z a hledat extrémy funkcí

$$g_{\pm}(x,y) := f(x, y, \pm\sqrt{1 - x^2 - y^2}) \quad \text{v kruhu} \quad \{(x,y) \in \mathbb{R}^2\,;\; x^2 + y^2 \le 1\}\,;$$

lze též přejít ke sférickým souřadnicím, tedy k funkci

$$h(\varphi, \vartheta) := f(\cos\varphi \cos\vartheta, \sin\varphi \cos\vartheta, \sin\vartheta) \quad \text{v intervalu} \quad \langle 0, 2\pi\rangle \times \langle -\tfrac{1}{2}\pi, \tfrac{1}{2}\pi\rangle\,.$$

Jindy se hodí např. cylindrické nebo jiné křivočaré souřadnice; vždy jde o to, abychom transformací souřadnic získali z f co nejjednodušší funkci.

Právě uvedené poznámky měly naznačit, že při hledání extrémů funkcí na varietách nejsme odkázáni jen na V. 17.3 a že je vhodné pokusit se předem odhadnout, která metoda povede v daném případě k cíli snadněji; protože záleží na specifických vlastnostech příslušné funkce a variety, obecná konkrétnější rada neexistuje. □

Věta 17.3 podává jistou *nutnou* podmínku, kterou musí splňovat každý bod $x \in V$, v němž má $f\,|\,V$ maximum nebo minimum; najdeme-li tedy všechna společná řešení $x = (x_1, \dots, x_q)$ rovnic (50) – (51), budou mezi nalezenými řešeními všechny body, v nichž má $f\,|\,V$ extrém. [7]) Čísla λ_i, která se v této souvislosti nazývají **Lagrangeovy neurčité koeficienty**, mají jen pomocný charakter. Není nutné je počítat (i když se tomu někdy nevyhneme); spíše se snažíme co nejrychleji je eliminovat. Protože soustava $(p + q)$ rovnic (50) – (51) je obecně nelineární a rovnice nemusí být dokonce ani algebraické, může být její řešení značně netriviální, ne-li nepřekonatelný problém. □

Uveďme dva příklady vázaných extrémů:

1d

Příklad 17.9. Hledejme extrémy funkce $f(x, y) := x^2 + y^2$ na nulové hladině V funkce

$$F(x,y) := 5x^2 - 6xy + 5y^2 - 4\,. \tag{52}$$

Geometrický smysl úlohy: Vhodným otočením souřadnicových os bychom se mohli zbavit „smíšeného členu“ $6xy$, což by ihned prozradilo, že $V = F_{-1}(0)$ je elipsa o středu v počátku. Vzhledem k tomu, že $f(x, y)$ je čtverec vzdálenosti bodu (x, y) od počátku, máme zjistit (bez otáčení os), které její body jsou nejméně a nejvíce vzdálené od počátku; tím zároveň určíme délku a polohu jejích poloos. [8])

Ověření předpokladů věty 17.3 nečiní potíže: Protože např. $F(2/\sqrt{5}, 0) = 0$, je $V \ne \emptyset$; funkce f a F jsou třídy C_∞ v $\mathbb{R}^2$ a V je varieta, protože obě derivace

$$\frac{\partial F(x,y)}{\partial x} = 10x - 6y\,, \quad \frac{\partial F(x,y)}{\partial y} = -6x + 10y \tag{53}$$

se anulují jen v počátku, který ve V zřejmě neleží.

[7]) Ještě jednou však zdůrazněme, že věta 17.3 existenci extrémů nezaručuje.

[8]) Náš další postup bude samozřejmě na těchto geometrických představách nezávislý.

Jakožto vzor uzavřené množiny $\{0\}$ při spojitém zobrazení F je množina V uzavřená. Z rovnosti $F(x,y)=0$ plyne, že $5(x^2+y^2)=4+6xy\leq 4+3(x^2+y^2)$, takže nerovnost $2(x^2+y^2)\leq 4$ platí pro všechny body $(x,y)\in V$; to dokazuje, že varieta V je omezená. V je tedy kompaktní a existence minima i maxima množiny $f(V)$ je zaručena.

Podle V. 17.3 máme najít všechny body $(x,y)\in V$, k nimž existuje $\lambda\in\mathbb{R}$ tak, že

$$(54)\qquad \frac{\partial f(x,y)}{\partial x}+\lambda\frac{\partial F(x,y)}{\partial x}=0,\quad \frac{\partial f(x,y)}{\partial y}+\lambda\frac{\partial F(x,y)}{\partial y}=0;$$

tyto rovnice lze po dosazení $\partial f/\partial x=2x$, $\partial f/\partial y=2y$ upravit na tvar

$$(55)\qquad (5\lambda+1)x=3\lambda y,\quad (5\lambda+1)y=3\lambda x.$$

Protože nemůže být $\lambda=0=5\lambda+1$, je z těchto rovnic patrné, že 1) $xy=0\Rightarrow x=y=0$; 2) $(\lambda=0)\vee(5\lambda+1=0)\Rightarrow x=y=0$; protože bod $(0,0)$ ve V neleží, plyne z toho, že všechna čtyři čísla λ, $5\lambda+1$, x, y jsou nenulová.

Dělením první rovnice v (55) druhou z nich získáme rovnost $x/y=y/x$ neboli $y^2=x^2$ neboli $y=\pm x$. Dosadíme-li $y=x$ (resp. $y=-x$) do rovnice $F(x,y)=0$, dostaneme rovnici $4x^2=4$ (resp. $16x^2=4$), která má řešení $x=\pm 1$ (resp. $x=\pm\frac{1}{2}$). Všechny body, v nichž funkce $f\,|\,V$ nabývá minima nebo maxima, leží tedy v množině $\{(1,1),\ (-1,-1),\ (\frac{1}{2},-\frac{1}{2}),\ (-\frac{1}{2},\frac{1}{2})\}$; Lagrangeův koeficient λ nebylo třeba počítat.[9] Protože $f(1,1)=f(-1,-1)=2$ a $f(\frac{1}{2},-\frac{1}{2})=f(-\frac{1}{2},\frac{1}{2})=\frac{1}{2}$, nabývá $f\,|\,V$ v prvních dvou bodech svého maxima, v druhých dvou svého minima.

Geometricky to znamená, že elipsa $F(x,y)=0$ (o středu v počátku) má poloosy délek $\sqrt{2}$ a $1/\sqrt{2}$, přičemž její hlavní osa (procházející body $(1,1)$ a $(-1,-1)$) svírá s osou x úhel $\frac{1}{4}\pi$.

Příklad 17.10. Najděme extrémy funkce $f(x,y,z):=xyz$ na nulové hladině W vektorové funkce $F=(F_1,F_2)$, kde

$$(56)\qquad F_1(x,y,z):=x^2+y^2+z^2-4,\ F_2(x,y,z):=(x-1)^2+y^2-1.$$

Nulová hladina W funkce F je průnik sféry o středu $(0,0,0)$ a poloměru 2 s válcovou plochou, jejíž osa je rovnoběžná s osou z a jejíž průnik s rovinou xy je kružnice o středu $(1,0)$ a poloměru 1. Jak již víme z Př. 16.8, je tato hladina známa pod názvem *Vivianiho křivka*; je kompaktní, protože je průnikem kompaktní množiny $(F_1)_{-1}(0)$ (sféry) s uzavřenou množinou $(F_2)_{-1}(0)$ (válcem).

Zkontrolujme, zdali platí předpoklady věty 17.3: Obě funkce f a F jsou třídy C_∞, v celém $\mathbb{R}^3$, přičemž

$$(57_1)\qquad \frac{\partial F_1}{\partial x}=2x,\quad \frac{\partial F_1}{\partial y}=2y,\quad \frac{\partial F_1}{\partial z}=2z,$$

[9]) Pro čtenáře, kteří jsou občas – třeba ze zvědavosti – ochotni vyslechnout nebo udělat i něco zbytečného: V prvním případě je $\lambda=-1/2$, ve druhém $\lambda=-1/8$.

2a

Příklad 17.1°. Vyšetřujme extrémy funkce

$$f(x,y) := x^3 - 2x^2y + 3y^3 \quad \text{v} \quad X := \langle -1,1\rangle^2. \tag{1}$$

Protože f je třídy C_∞ v celé rovině, najdeme nejdříve všechny její stacionární body. Snadno zjistíme, že funkce

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 3x^2 - 4xy\,, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = -2x^2 + 9y^2 \tag{2}$$

mají jediný společný kořen, a to bod $(0,0)$. Protože f v něm nabývá hodnoty 0 a protože f je v některých bodech z X kladná, v jiných záporná ($f(\pm1,0) = \pm1$), *nemá f v bodě $(0,0)$ žádný extrém.*

Protože f v $\operatorname{int} X$ ani maxima, ani minima nenabývá, leží oba extrémy na hranici X. Vzhledem k tomu, že ∂X je sjednocením čtyř úseček, vyšetříme funkce

$$g_1(x) := f(x,-1) = x^3 + 2x^2 - 3\,, \quad g_2(x) := f(x,1) = x^3 - 2x^2 + 3\,, \tag{3}$$

$$h_1(y) := f(-1,y) = 3y^3 - 2y - 1\,, \quad h_2(y) := f(1,y) = 3y^3 - 2y + 1\,. \tag{4}$$

Derivace $3x^2 + 4x$ a $3x^2 - 4x$ funkcí (3) [1]) jsou rovny nule po řadě v bodech 0, $-\frac{4}{3}$ a v bodech 0, $\frac{4}{3}$. Protože body $\pm(\frac{4}{3},1)$ neleží v X, počítáme pouze hodnoty

$$f(-1,-1) = -2\,, \quad f(0,-1) = -3\,, \quad f(1,-1) = 0\,, \tag{5'}$$

$$f(-1,1) = 0\,, \quad f(0,1) = 3\,, \quad f(1,1) = 2\,. \tag{5''}$$

Derivace $h_1'(y) = h_2'(y) = 9y^2 - 2$ funkcí (4) mají kořeny $\pm c$, kde $c := \frac{1}{3}\sqrt{2}$; protože hodnoty funkce f ve vrcholech čtverce X jsou již uvedeny v ($5'$) a v ($5''$), počítáme jen

$$f(-1,-c) = \tfrac{4}{9}\sqrt{2} - 1 \doteq -0.37\,, \quad f(-1,c) = -\tfrac{4}{9}\sqrt{2} - 1 \doteq -1.63\,, \tag{6'}$$

$$f(1,-c) = 1 + \tfrac{4}{9}\sqrt{2} \doteq 1.63\,, \quad f(1,c) = 1 - \tfrac{4}{9}\sqrt{2} \doteq 0.37\,. \tag{6''}$$

Porovnáme-li hodnoty z ($5'$) – ($6''$), vidíme, že

$$M := \max f(X) = f(0,1) = 3\,, \quad m := \min f(X) = f(0,-1) = -3\,. \tag{7}$$

Pro všechny body $(x,y) \in X$, pro něž je $(0,1) \neq (x,y) \neq (0,-1)$, platí přitom ostré nerovnosti $m < f(x,y) < M$.

Příklad 17.2°. Najděme extrémy funkce

$$f(x,y) := 4x^3 - 3x - 4y^3 + 9y \quad \text{v} \quad X := \{(x,y);\, x^2 + y^2 \le 1\}\,; \tag{8}$$

f je opět třídy C_∞ v $\mathbb{R}^2$ a rovnice

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 12x^2 - 3 = 0\,, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = -12y^2 + 9 = 0 \tag{9}$$

[1]) Funkce (3) buď skutečně derivujeme, nebo (což je zejména ve složitějších případech asi jednodušší) dosadíme do první rovnosti v (2) po řadě $y = -1$ a $y = 1$.

10. Hledání extrémů funkce na množině

Ukážeme si základní metody hledání největší a nejmenší hodnoty funkce více reálných proměnných na množině (a bodů, ve kterých se těchto hodnot nabývá). V případě, že funkce největší a nejmenší hodnoty nenabývá, budeme hledat supremum a infimum. Jak jsme se již zmínili, budou nás zajímat především funkce více proměnných. Přesto bude užitečné umět vyšetřovat funkce jedné proměnné, jejichž extrémy hledáme například pomocí vyšetření monotonie. Hlavní metody jsou popsány v [Z, oddíl 2.9].

Extrémům ve smyslu předchozího odstavce se často říká *globální extrémy* (někdy *absolutní extrémy*, viz [Z]), aby se odlišily od lokálních extrémů. My budeme říkat prostě extrémy, což je jednak kratší a jednak dostatečně určující.

§66. Asi nejdůležitějším prostředkem hledání extrémů je kombinace existenční věty a různých nutných podmínek pro (lokální) extrém (tzv. „**metoda podezřelých bodů**“). Základní existenční větou je věta následující.

Reálná funkce spojitá na neprázdné kompaktní množině $M \subset \mathbb{R}^n$ nabývá na M svého maxima i minima.

Nejjednodušší nutná podmínka vychází z pozorování, že nabývá-li se extrém v nějakém vnitřním bodě množiny, pak je v tomto bodě i lokální extrém, a z následující věty.

Nechť G je podmnožina $\mathbb{R}^n$ a funkce $f\colon G \to \mathbb{R}$ nechť má v bodě $a \in G^\circ$ lokální extrém. Pokud pro nějaké $i = 1, \ldots, n$ parciální derivace $\frac{\partial f}{\partial x_i}(a)$ existuje, pak $\frac{\partial f}{\partial x_i}(a) = 0$.

Metoda spočívá v tom, že vyloučíme body, které nesplňují námi uvažované nutné podmínky. Zbylým bodům se říká „podezřelé body“. Mezi nimi dále hledáme ty, v nichž je funkční hodnota největší nebo nejmenší. V následujícím příkladu ukážeme, jak uvedený postup použijeme s použitím uvedené nutné podmínky.

25) <u>Příklad</u> Najděte minimum a maximum funkce $f(x, y) = x^2 - 3y^2 + xy$ na množině $M = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \colon |x| \le 1, |y| \le 1\}$.

Řešení. Funkce f je polynom v proměnných x a y, je tedy spojitá na celém $\mathbb{R}^2$. Množina M je uzavřená (lze vyjádřit např. jako průnik dvou množin, které jsou vzorem uzavřených intervalů při spojité funkci) a omezená (je totiž rovna uzavřenému čtverci o straně 2, se středem v počátku a se stranami rovnoběžnými s osami, je tedy obsažena v kruhu o poloměru $\sqrt{2}$ se středem v počátku), je tudíž kompaktní. Navíc je M zřejmě neprázdná, a tak f nabývá na M svých extrémů.

Nyní již víme, že f nabývá na M extrémů, zbývá tyto hodnoty určit. Vyloučíme tedy body, kde extrém být nemůže, pomocí uvedené nutné podmínky. Množina M však není otevřená, musíme proto rozlišit dva případy.

a) Funkce f nabývá některého extrému v nějakém bodě vnitřku M. Protože f má parciální derivace prvního řádu, musí být v tomto bodě nulové. Platí tedy

$2x + y = 0$, $-6y + x = 0$, což je splněno pouze pro $x = y = 0$. Jediný bod vnitřku M, kde f může nabývat extrému, je tedy bod $(0,0)$, kde $f(0,0) = 0$.

b) Funkce f nabývá některého extrému na hranici M. Protože M je uzavřená, je její hranice rovna $M \setminus M^\circ$, je tedy tvořena čtyřmi úsečkami. Probereme je postupně.

i) $x = 1$, $y \in [-1,1]$. Na této úsečce má funkce f tvar $f(1,y) = 1 + y - 3y^2$. Má-li f extrém v bodě $(1, y_0)$, pak funkce (jedné proměnné) $y \mapsto 1 + y - 3y^2$ má extrém (stejného druhu) v bodě y_0. To se může stát buď v případě, že y_0 je krajním bodem intervalu $[-1,1]$, nebo v případě, že uvedená funkce jedné proměnné má v y_0 nulovou derivaci (protože derivace existuje). První možnost dává body $(1,-1)$ a $(1,1)$, přičemž $f(1,-1) = -3$ a $f(1,1) = -1$. Druhá možnost dává rovnici $1 - 6y = 0$, tedy bod $(1, 1/6)$, přičemž $f(1, 1/6) = 13/12$.

ii) $x = -1$, $y \in [-1,1]$. Na této úsečce má funkce f tvar $f(-1,y) = 1 - y - 3y^2$. Podobně jako v předchozím bodu dostáváme jednak krajní body $(-1,1)$ a $(-1,-1)$, přičemž $f(-1,1) = -3$ a $f(-1,-1) = -1$; a pak body, v nichž platí $-1 - 6y = 0$, neboli bod $(-1,-1/6)$. V něm máme $f(-1,-1/6) = 13/12$.

iii) $y = 1$, $x \in (-1,1)$. Zde krajní body vyšetřovat nemusíme, neboť jsme je zahrnuli již v bodech i) a ii). Funkce f má zde tvar $f(x,1) = x^2 + x - 3$. Je-li v nějakém bodě extrém, platí v něm $2x+1 = 0$, což splňuje jen bod $(-1/2, 1)$. V něm máme $f(-1/2,1) = -13/4$.

iv) $y = -1$, $x \in (-1,1)$. Funkce f má zde tvar $f(x,1) = x^2 - x - 3$. Je-li v nějakém bodě extrém, platí v něm $2x - 1 = 0$, což splňuje jen bod $(1/2,-1)$. V něm máme $f(1/2,-1) = -13/4$.

Zbývá učinit závěr. Víme, že funkce f svých extrémů na M nabývá a že jich nemůže nabývat mimo nalezených devět bodů. Porovnáním hodnot ve zmíněných bodech zjistíme, že maximum je rovno $13/12$ a nabývá se ve dvou bodech $(1,1/6)$ a $(-1,-1/6)$; a minimum je $-13/4$ a nabývá se v bodech $(-1/2,1)$ a $(1/2,-1)$. ■

Poznamenejme, že při vyšetřování funkce f na hranici množiny M v předchozím příkladě jsme mohli využít symetrie této funkce, konkrétně toho, že $f(-x,-y) = f(x,y)$ pro $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. Pak výsledek případu (ii) lze odvodit z případu (i) a výsledek případu (iv) lze odvodit z případu (iii).

§67. Z řešení příkladu v předchozím paragrafu je zřejmé, že potřebujeme znát nutné podmínky pro extrém na hranici množiny. Ve zmíněném příkladu bylo možné analýzu hranice jednoduše převést na analýzu funkce jedné proměnné. To je možné i v dalších případech pomocí **parametrizace hranice**, například, je-li hranicí kružnice či elipsa.

<u>P ř í k l a d</u> Nalezněte extrémy funkce $f(x,y) = x + y$ na množině

$$M = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \colon 4x^2 + y^2 \le 1\}.$$

Řešení. Množina M je uzavřená (lze ji vyjádřit jako vzor uzavřeného intervalu při spojitém zobrazení) a omezená (z definující nerovnosti je zřejmé, že každý bod

2c

Příklad 3.5.11.

Určete největší a nejmenší hodnotu funkce

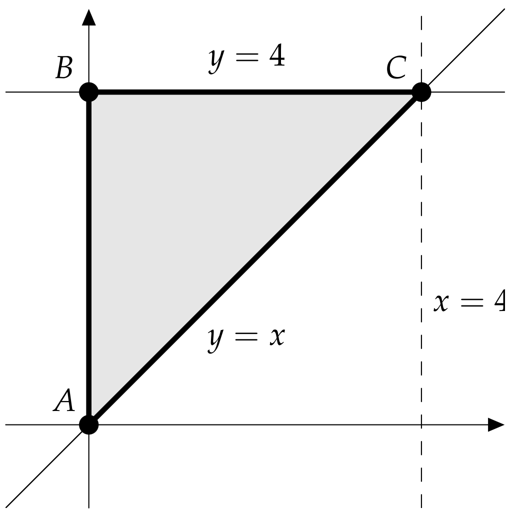
$$f(x,y) = x^2 - 3y^2 - x + 18y + 4$$

na množině na množině M, která je určena nerovnostmi $0 \le x \le y \le 4$.

Řešení. Protože množina M je kompaktní a funkce f je na této množině spojitá, hledané body existují. Nejdříve určíme stacionární body funkce f, tj. vyřešíme soustavu

$$f_x(x,y) = 2x - 1 = 0 \quad \& \quad f_y(x,y) = -6y + 18 = 0.$$

Řešením je bod $[1/2, 3]$ s funkční hodnotou $f(1/2, 3) = 123/4$. Protože $[1/2, 3] \in M$, je tento bod jedním z kandidátů na hledaný globální extrém (nicméně není potřeba určovat jeho lokální charakter).



Obrázek 3.5.37: Množina M z Příkladu 3.5.11.

Nyní se zaměříme na hranici množiny M (viz Obrázek 3.5.37), kterou tvoří tři úsečky:

(i) Úsečku spojující body A a B lze vyjádřit jako $x = 0$ pro $0 \le y \le 4$, takže z funkce $f(x,y)$ dostaneme funkci $g(y) = -3y^2 + 18y + 4$. Určíme stacionární body funkce g, tj. $g'(y) = -6y + 18 = 0$. Odtud máme $y = 3$, což vyhovuje omezení pro y. Proto $[0,3]$ je dalším kandidátem na globální extrém s hodnotou $f(0,3) = 31$. Dalšími kandidáty jsou také krajní body této úsečky, takže ještě vypočteme příslušné funkční hodnoty, tj. $f(A) = f(0,0) = 4$ a $f(B) = f(0,4) = 28$.

(ii) Úsečku spojující body B a C lze vyjádřit jako $y = 4$ pro $0 \le x \le 4$, takže z funkce $f(x,y)$ dostaneme funkci $h(x) = x^2 - x + 28$. Určíme stacionární body funkce h, tj. $h'(x) = 2x - 1 = 0$. Odtud máme $x = 1/2$, což vyhovuje omezení pro x. Proto

$[1/2, 4]$ je dalším kandidátem na globální extrém s hodnotou $f(1/2, 4) = 111/4$. Dalšími kandidáty jsou také krajní body této úsečky, takže ještě vypočteme příslušné funkční hodnoty, tj. $f(B) = f(0, 4) = 28$ a $f(C) = f(4, 4) = 40$.

(ii) Úsečku spojující body C a A lze vyjádřit jako $y = x$ pro $0 \leq x \leq 4$, takže z funkce $f(x, y)$ dostaneme funkci $m(x) = -2x^2 + 17x + 4$. Určíme stacionární body funkce m, tj. $m'(x) = -4x + 17 = 0$. Odtud máme $x = 17/4$, což nevyhovuje omezení pro x, tj. $[17/4, 17/4] \notin M$. Takže v tomto případě jsou kandidáty pouze krajní body této úsečky, v nichž vypočteme příslušné funkční hodnoty, tj. $f(C) = f(4, 4) = 40$ a $f(A) = f(0, 0) = 4$.

Celkem jsme nalezli 6 kandidátů na globální extrém, ze kterých stačí vybrat ten s nejmenší funkční hodnotou a ten s největší funkční hodnotou, tj. globální minimum nastává v bodě $[0, 0]$ s hodnotou $f_{\min} = 4$ a globální maximum v bodě $[4, 4]$ s hodnotou $f_{\max} = 40$. ▲

2d

Příklad 3.5.13.

Určete největší a nejmenší hodnotu funkce

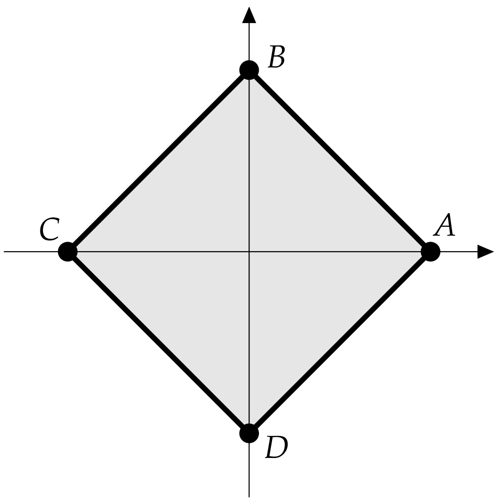
$$f(x,y) = (x-y)^2 + x^2$$

na čtverci s vrcholy $A = [2,0]$, $B = [0,2]$, $C = [-2,0]$ a $D = [0,-2]$.

Řešení. Protože množina M je kompaktní a funkce f je na této množině spojitá, hledané body existují. Nejdříve určíme stacionární body funkce f, tj. vyřešíme soustavu

$$f_x(x,y) = 4x - 2y = 0 \quad \& \quad f_y(x,y) = -2x + 2y = 0.$$

Řešením je pouze bod $[0,0]$ s funkční hodnotou $f(0,0) = 0$. Protože $[0,0] \in M$, je tento bod jedním z kandidátů na hledaný globální extrém (nicméně není potřeba určovat jeho lokální charakter).



Obrázek 3.5.39: Množina M z Příkladu 3.5.13.

Nyní se zaměříme na hranici množiny M (viz Obrázek 3.5.39), kterou tvoří čtyři úsečky:

(i) Úsečku spojující body A a B lze vyjádřit jako $y = 2 - x$ pro $0 \leq x \leq 2$, takže z funkce $f(x,y)$ dostaneme funkci $g(x) = (2x-2)^2 + x^2$. Určíme stacionární body funkce g, tj. $g'(x) = 10x - 8 = 0$. Odtud máme $x = 4/5$, což vyhovuje omezení pro x. Proto $[4/5, 6/5]$ je dalším kandidátem na globální extrém s hodnotou $f(4/5, 6/5) = 4/5$. Dalšími kandidáty jsou také krajní body této úsečky, takže ještě vypočteme příslušné funkční hodnoty, tj. $f(A) = f(2,0) = 8$ a $f(B) = f(0,2) = 4$.

(ii) Úsečku spojující body B a C lze vyjádřit jako $y = x + 2$ pro $-2 \leq x \leq 0$, takže z funkce $f(x,y)$ dostaneme funkci $h(x) = 4 + x^2$. Určíme stacionární body funkce g, tj. $g'(x) = 2x = 0$. Odtud máme $x = 0$, což vyhovuje omezení pro x. Proto $[0,2]$ je dalším kandidátem na globální extrém, který je ale totožný s bodem B, jehož funkční hodnotu jsme vypočítali v předchozí části. Ještě zbývá určit funkční hodnotu ve druhém krajním bodě úsečky, tj. $f(C) = f(-2, 0) = 8$.

(iii) Úsečku spojující body C a D lze vyjádřit jako $y = -x - 2$ pro $-2 \leq x \leq 0$, takže z funkce $f(x, y)$ dostaneme funkci $m(x) = (2x + 2)^2 + x^2$. Určíme stacionární body funkce m, tj. $m'(x) = 10x + 8 = 0$. Odtud máme $x = -4/5$, což vyhovuje omezení pro x. Proto $[-4/5, -6/5]$ je dalším kandidátem na globální extrém s hodnotou $f(-4/5, -6/5) = 4/5$. Ještě vypočteme funkční hodnotu ve druhém krajním bodě úsečky, tj. $f(D) = f(0, -2) = 4$.

(iv) Úsečku spojující body D a A lze vyjádřit jako $y = x - 2$ pro $0 \leq x \leq 2$, takže z funkce $f(x, y)$ dostaneme funkci $n(x) = 4 + x^2$. Určíme stacionární body funkce n, tj. $n'(x) = 2x = 0$. Odtud máme $x = 0$, což vyhovuje omezení pro x. Proto $[0, -2]$ je dalším kandidátem na globální extrém, který je ale totožný s bodem D, jehož funkční hodnotu jsme vypočítali v předchozí části stejně jako funkční hodnotu ve druhém krajním bodě úsečky.

Celkem jsme nalezli 7 kandidátů na globální extrém. Nyní stačí vybrat ten s nejmenší funkční hodnotou a ten s největší funkční hodnotou, tj. globální minimum nastává v bodě $[0, 0]$ s hodnotou $f_{\min} = 0$ a globální maximum v bodech $[2, 0]$ a $[-2, 0]$ s hodnotou $f_{\max} = 8$. ▲

Dosadíme-li $x = \pi$ a použijeme-li $\varphi(\pi) = 0$, dostaneme $\varphi'(\pi) = 0$ a $\varphi''(\pi) = 0$.

3a

Příklad A4 : Množina M je omezená a uzavřená, a proto je kompaktní. Funkce f je spojitá na M, takže na M nabývá svého maxima i minima. Spočtěme parciální derivace funkce f a zkoumejme, zda uvnitř množin M existuje bod, kde jsou obě parciální derivace funkce f nulové.

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 4x^3y, \qquad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = x^4, \qquad [x,y] \in \mathbb{R}^2.$$

Obě parciální derivace jsou nulové pro $[0,y]$; $y \in (-2,2)$. Hranici množiny M si rozdělme na dvě části:

$$H_1 = \{[x,y] \in \mathbb{R}^2;\ x^4 + y^4 = 16, x > -1\}, \qquad H_2 = \{[-1,y] \in \mathbb{R}^2;\ y \in \langle -\sqrt[4]{15}, \sqrt[4]{15}\rangle\}.$$

Pro nalezení podezřelých bodů na množině H_1 použijeme metodu Lagrangeových multiplikátorů. Vazebná podmínka je určena funkcí $g(x,y) = x^4 + y^4 - 16$, která je (stejně jako f) třídy $\mathcal{C}^1(\mathbb{R}^2)$. Pro parciální derivace funkce g platí

$$\frac{\partial g}{\partial x}(x,y) = 4x^3, \qquad \frac{\partial g}{\partial y}(x,y) = 4y^3, \qquad [x,y] \in \mathbb{R}^2.$$

Pro každé $[x,y] \in H_1$ platí $(\frac{\partial g}{\partial x}(x,y), \frac{\partial g}{\partial y}(x,y)) \neq (0,0)$. Řešme následující soustavu

$$\begin{aligned}
&(1) && x^4 + y^4 = 16,\\
&(2) && 4x^3y = \lambda 4x^3,\\
&(3) && x^4 = \lambda 4y^3.
\end{aligned}$$

Z (2) vyplývá, že $x = 0$ nebo $y = \lambda$. V prvním případě dostaneme z (1), že $y = \pm 2$. V druhém případě dostaneme z (3), že $x = \sqrt{2}y$ nebo $x = -\sqrt{2}y$. Dosazením do (1) obdržíme body

$$\left[\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt[4]{5}}, \frac{2}{\sqrt[4]{5}}\right], \left[\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt[4]{5}}, -\frac{2}{\sqrt[4]{5}}\right], \left[-\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt[4]{5}}, \frac{2}{\sqrt[4]{5}}\right], \left[-\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt[4]{5}}, -\frac{2}{\sqrt[4]{5}}\right],$$

Poslední dva body ovšem nesplňují podmínku $x > -1$.

Zkoumejme chování na množině H_2. Funkce f má na H_2 tvar:

$$f(-1,y) = y, \qquad y \in \langle -\sqrt[4]{15}, \sqrt[4]{15}\rangle.$$

Dalšími podezřelými body tedy jsou

$$[-1, \sqrt[4]{15}], \qquad [-1, -\sqrt[4]{15}]$$

Porovnáním funkčních hodnot v podezřelých bodech zjistíme, že f nabývá maxima na množině M v bodě $\left[\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt[4]{5}}, \frac{2}{\sqrt[4]{5}}\right]$ a minima v bodě $\left[\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt[4]{5}}, -\frac{2}{\sqrt[4]{5}}\right]$.

Funkce F je definována na $\mathbb{R}^2$ a pro její parciální derivace platí:

$$\frac{\partial F}{\partial x}(x,y) = 8x^3y + 3x^2 + y,$$
$$\frac{\partial F}{\partial y}(x,y) = 2x^4 + 3y^2 + x.$$

Obě parciální derivace jsou na $\mathbb{R}^2$ spojité, stejně jako jejich parciální derivace, tj. $F \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}^2)$. Dále platí $F(1,0) = 0$ a $\frac{\partial F}{\partial y}(1,0) = 3 \neq 0$. Tím jsme ověřili, že naše rovnice určuje v jistém okolí bodu $[1,0]$ implicitně zadanou funkci proměnné x, která sama je třídy $\mathcal{C}^2$. Funkci označme φ a její derivace vypočítejme postupným derivováním vztahu

$$2x^4\varphi(x) + x^3 + \varphi(x)^3 + x\varphi(x) - 1 = 0,$$
$$8x^3\varphi(x) + 2x^4\varphi'(x) + 3x^2 + 3\varphi(x)^2\varphi'(x) + \varphi(x) + x\varphi'(x) = 0,$$
$$24x^2\varphi(x) + 8x^3\varphi'(x) + 8x^3\varphi'(x) + 2x^4\varphi''(x) + 6x + 6\varphi(x)(\varphi'(x))^2 + 3\varphi(x)^2\varphi''(x)$$
$$+\varphi'(x) + \varphi'(x) + x\varphi''(x) = 0.$$

Dosadíme-li $x = 1$ a použijeme-li $\varphi(1) = 0$, dostaneme $\varphi'(1) = -1$ a $\varphi''(1) = 4$.

3b

Příklad B4 : Množina M je omezená a uzavřená, a proto je kompaktní. Funkce f je spojitá na M, takže na M nabývá svého maxima i minima. Spočtěme parciální derivace funkce f a zkoumejme, zda uvnitř množiny M existuje bod, kde jsou obě parciální derivace funkce f nulové.

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 2, \qquad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 4, \qquad [x,y] \in \mathbb{R}^2.$$

Obě parciální derivace jsou vždy nenulové a proto f nabývá extrémů na hranici M. Hranici množiny M si rozdělme na tři části:

$$H_1 = \{[x,y] \in \mathbb{R}^2;\ \sqrt[4]{x} + \sqrt[4]{y} = 1, x > 0,\ y > 0\},$$
$$H_2 = \{[0,y] \in \mathbb{R}^2;\ y \in \langle 0,1\rangle\},$$
$$H_3 = \{[x,0] \in \mathbb{R}^2;\ x \in \langle 0,1\rangle\}.$$

Pro nalezení podezřelých bodů na množině H_1 použijeme metodu Lagrangeových multiplikátorů. Vazebná podmínka je určena funkcí $g(x,y) = \sqrt[4]{x} + \sqrt[4]{y} - 1$, která je (stejně jako f) třídy $\mathcal{C}^1$ na prvním otevřeném kvadrantu. Pro parciální derivace funkce g platí

$$\frac{\partial g}{\partial x}(x,y) = \frac{1}{4}x^{-3/4}, \qquad \frac{\partial g}{\partial y}(x,y) = \frac{1}{4}y^{-3/4}, \qquad x > 0,\ y > 0.$$

Pro každé $[x,y] \in H_1$ platí $(\frac{\partial g}{\partial x}(x,y), \frac{\partial g}{\partial y}(x,y)) \neq (0,0)$. Řešme následující soustavu

(1) $$\sqrt[4]{x} + \sqrt[4]{y} = 1,$$

(2) $$2 = \lambda\frac{1}{4}x^{-3/4},$$

(3) $$4 = \lambda\frac{1}{4}y^{-3/4}.$$

Z (2) a (3) vyplývá, že $x = 2\sqrt[3]{2}y$. Dosazením do (1) obdržíme podezřelý bod

$$\left[\frac{2^{4/3}}{(2^{1/3}+1)^4}, \frac{1}{(2^{1/3}+1)^4}\right].$$

Zkoumejme chování na množině H_2. Funkce f má na H_2 tvar:

$$f(0,y) = 4y, \qquad y \in \langle 0,1 \rangle.$$

Dalšími podezřelými body tedy jsou $[0,0]$, $[0,1]$.

Podobně zkoumejme chování na množině H_3. Funkce f má na H_3 tvar:

$$f(x,0) = 2x, \qquad x \in \langle 0,1 \rangle.$$

Podezřelými body tedy jsou $[0,0]$, $[1,0]$.

Porovnáním funkčních hodnot v podezřelých bodech zjistíme, že f nabývá maxima na množině M v bodě $[0,1]$ a minima v bodě $[0,0]$.

Příklad B5 : Funkce, kterou máme integrovat, je definována na $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$. Rozložme naši funkci na parciální zlomky:

$$\frac{2x^2+3x+2}{(x+1)(x^2+x+1)} = \frac{1}{x+1} + \frac{x+1}{x^2+x+1}.$$

Nyní integrujme jednotlivé parciální zlomky:

$$\begin{aligned}
\int \frac{1}{x+1}\,dx &\overset{c}{=} \log|x+1|, \\
\int \frac{x+1}{x^2+x+1}\,dx &= \frac{1}{2}\int \frac{2x+1}{x^2+x+1}\,dx + \frac{1}{2}\int \frac{dx}{x^2+x+1} \\
&= \frac{1}{2}\log(x^2+x+1) + \frac{1}{2}\int \frac{dx}{(x+1/2)^2+3/4} \\
&= \frac{1}{2}\log(x^2+x+1) + \frac{1}{2}\cdot\frac{4}{3}\int \frac{dx}{((2x+1)/\sqrt{3})^2+1} \\
&\overset{c}{=} \frac{1}{2}\log(x^2+x+1) + \frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right).
\end{aligned}$$

Dohromady tedy máme

$$\int \frac{2x^2+3x+2}{(x+1)(x^2+x+1)}\,dx \overset{c}{=} \log|x+1| + \frac{1}{2}\log(x^2+x+1) + \frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right)$$

na intervalech $(-\infty,-1)$ a $(-1,+\infty)$.

3e

Příklad F4 : Množina M je omezená a uzavřená (jedná se o elipsu), a proto je kompaktní. Funkce f je spojitá na M, takže na M nabývá svého maxima i minima. Hledejme nejprve podezřelé body uvnitř množiny M. Pro parciální derivace funkce f platí:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 2x \cdot e^{-(2x^2+y^2)} + (x^2+7y^2)e^{-(2x^2+y^2)} \cdot (-4x),$$
$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 14y \cdot e^{-(2x^2+y^2)} + (x^2+7y^2)e^{-(2x^2+y^2)} \cdot (-2y).$$

Uvnitř množiny M hledáme ty body, kde jsou obě parciální derivace nulové. To jsou právě ty body z M, které splňují

$$2x(1-2(x^2+7y^2)) = 0,$$
$$2y(7-(x^2+7y^2)) = 0.$$

Řešením této soustavy jsou body $[0,0]$, $[1/\sqrt{2},0]$, $[-1/\sqrt{2},0]$, $[0,1]$, $[0,-1]$, pouze první tři však leží uvnitř množiny M.

Podezřelé body na hranici M hledejme metodou Lagrangeových multiplikátorů. Množina $H(M)$ je určena pomocí vazebné funkce

$$g(x,y) = x^2+4y^2-1.$$

Funkce f i g jsou třídy $C^1(\mathbb{R}^2)$. Pro parciální derivace g platí

$$\frac{\partial g}{\partial x}(x,y) = 2x, \qquad \frac{\partial g}{\partial y}(x,y) = 8y.$$

Vektor $(2x, 8y)$ je nulový, právě když $[x,y]=[0,0]$. Tento bod ovšem neleží na hranici množiny M. Nyní budeme řešit následující soustavu

$$2x \cdot e^{-(2x^2+y^2)} + (x^2+7y^2)e^{-(2x^2+y^2)} \cdot (-4x) = 2\lambda x, \tag{1}$$
$$14y \cdot e^{-(2x^2+y^2)} + (x^2+7y^2)e^{-(2x^2+y^2)} \cdot (-2y) = 8\lambda y, \tag{2}$$
$$x^2+4y^2 = 1. \tag{3}$$

Z (1) vyplývá, že $x=0$ nebo $e^{-(2x^2+y^2)}(1-2(x^2+7y^2)) = \lambda$ a z (2) vyplývá, že $y=0$ nebo $e^{-(2x^2+y^2)}(7-(x^2+7y^2)) = 4\lambda$. Pokud $x=0$, pak podle (3) je $y=\pm 1/2$. Pokud $y=0$, pak podle (3) je $x=\pm 1$. V případě, že $x \neq 0$ a $y \neq 0$, musí být

$$4e^{-(2x^2+y^2)}(1-2(x^2+7y^2)) = e^{-(2x^2+y^2)}(7-(x^2+7y^2)).$$

Odtud plyne $7(x^2+7y^2) = -3$, což je spor.

Nalezli jsme tyto podezřelé body

$$[0,0],\ [1/\sqrt{2},0],\ [-1/\sqrt{2},0],\ [0,1/2],\ [0,-1/2],\ [1,0],\ [-1,0].$$

Funkce f nabývá maxima v bodech $[0,1/2]$, $[0,-1/2]$ a minima v bodě $[0,0]$.

4 kvádr A-H, $A = [0,0,0]$

$G \in M$:

$$M = \{[x,y,z] : 4x+2y+z=2 \quad x,y,z \geq 0\}$$

Cíl: max objem

$G = [x_0, y_0, z_0]$

hledáme max $f(x,y,z) = xyz$ (mělo by být $|xyz|$, ale naše $x,y,z \geq 0$)

$$g(x,y,z) = 4x+2y+z-2$$

(1) $\nabla g = (4,2,1) \neq 0$ nikdy

(2) $f(x,y,z) + \lambda g(x,y,z) = 0 \qquad xyz + \lambda(4x+2y+z-2) = 0$

$\frac{\partial}{\partial x}$: $yz + 4\lambda = 0$ $\qquad yz - 4xy = 0$

$\frac{\partial}{\partial y}$: $xz + 2\lambda = 0$ $\qquad xz - 2xy = 0$

$\frac{\partial}{\partial z}$: $xy + \lambda = 0$ $\rightarrow \lambda = -xy \rightarrow$

navíc $4x+2y+z=0$ $\qquad 4x+2y+z=0$

$$\rightarrow \left.\begin{matrix} -yz+4xy=0 \\ 2xz-4xy=0 \end{matrix}\right\} \rightarrow 2xz - yz = 0 \rightarrow z(2x-y) = 0$$

$4x+2y+z=0 \qquad 4x+2y+z=0 \qquad 4x+2y+z=0$

(a) $z=0$ $\rightarrow$ tam max stejně nebude (místo kvádru by byl obdélník)

$\rightarrow$ (b) $\boxed{y=2x}$, $4x+2y+z=0$

$\rightarrow \quad 4x + 2\cdot 2x + z = 2$

$\rightarrow \quad \boxed{2 - 8x = z}$ $\quad$ (a máme $y = 2x$)

dosadíme do $\boxed{xz - 2xy = 0}$

$\rightarrow \quad x(2-8x) - 2x \cdot 2x = 0$

$2x - 8x^2 - 4x^2 = 0$

$2x(1-6x) = 0$

$x = 0$ (nebude max)

$\boxed{x = \frac{1}{6}}$ $\quad$ pak $\boxed{y = \frac{1}{3}}$ $\quad$ $z = 2 - \frac{8}{6}$

$\boxed{z = \frac{2}{3}}$

(jen pro formu $\lambda = -xy \quad \lambda = -\frac{1}{18}$).

Max. je v bodě $\left[\frac{1}{6}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right]$

a hodnota je $\dfrac{2}{2\cdot 3\cdot 9} = \underline{\underline{\dfrac{1}{27}}}$

Bonusové příklady

Farmář a fařmářka mají 100 m pletiva a rádi by oplotili pozemek pro ovce tak, aby měl co největší plochu. Trvají na tom, že pozemek bude mít tvar obdélníku. Ježto je u řeky, stačí jej oplotit ze 3 stran. Jaké bude zadání za pomoci Lagrangeových multiplikátorů?

(a) $f(x,y) = xy$, $g(x,y) = 2x + y - 100$

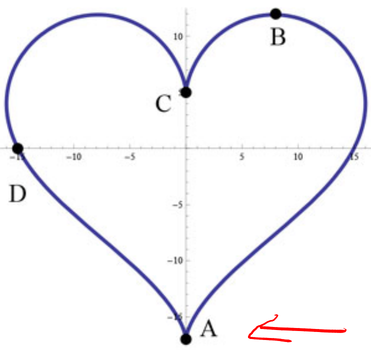
(b) $f(x,y) = 2x + 2y - 100$, $g(x,y) = xy$

(c) $f(x,y) = xy$, $g(x,y) = x + y - 100$

(d) $f(x,y) = x + y$, $g(x,y) = xy - 100$

Figure 1: https://www.cbr.com/shaun-the-sheep-best-worst-episodes-imdb/

Ve kterém z bodů A, B, C, D se nachází minimum funkce $f(x,y) = y$ vzhledem ke křivce na obrázku?



Zdroj: https://www.cpp.edu/conceptests/question-library/mat214.shtml