3. cvičení – Extrémy na hranici

https://www2.karlin.mff.cuni.cz/~kuncova/vyuka.php, kuncova@karlin.mff.cuni.cz

Teorie

Věta 1 (Lagrangeovy multiplikátory)**.** Nechť $G \subset \mathbb{R}^2$ je otevřená množina, $f, g \in \mathcal{C}^2(G)$, $M = \{[x, y] \in G, g(x, y) = 0\}$ a $[x_0, y_0] \in M$ je bodem lokálního extrému funkce f vzhledem k množině M. Pak je splněna alespoň jedna z následujících podmínek:

1. $\nabla g(x_0, y_0) = (0, 0)$
2. existuje $\lambda \in \mathbb{R}$ splňující $\nabla f(x_0, y_0) + \lambda \nabla g(x_0, y_0) = (0, 0)$

Poznámka 2. Nechť f je spojitá na $\overline{M}$. Pak $\sup f(M) = \sup f(\overline{M})$ a $\inf f(M) = \inf f(\overline{M})$.

Věta 3. Nechť $M \subset \mathbb{R}^n$ je kompaktní množina, $f : M \to \mathbb{R}$ je spojitá funkce. Pak existují body $c, d \in M$ tak, že

$$f(c) = \inf\{f(x); x \in M\}, \qquad f(d) = \sup\{f(x); x \in M\}.$$

Algoritmus - Extrémy na omezené množině:

1. Je-li množina uzavřená, tak odůvodníme, že **spojitá funkce na kpt. nabývá extrémy**.
2. Extrémy mohou být:
   (a) na vnitřku množiny jen v místech s **nulovými derivacemi** (jejich typ nevyšetřujeme, pokud na to nejsme přímo tázáni);
   (b) v bodech vnitřku, kde **neexistuje derivace**;
   (c) na **hranici**: hraniční křivky (nebo plochy)
      i. užijeme **Lagrangeovy multiplikátory**;
      ii. lze rovnou **dosadit** a získat funkci 1 proměnné.
   (d) na **hranici hranice**: krajní body, hroty trojúhelníku atp.
3. Všechny **podezřelé body sepíšeme** a porovnáme jejich funkční hodnoty. Vybereme maximum a minimum.
4. Pokud množina není uzavřená, tak ji prve uzavřeme a vyšetříme jako kompakt. Pokud je extrém na její hranici (mimo množinu), tak funkce tento extrém nemá - ale bude to její sup/inf.

Příklady

1. Najděte globální extrémy funkcí na množině M
   (a) $f(x, y) = x^2 + y$, $M = \{[x, y] \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\}$
   (b) $f(x, y) = 4x + 3y - 4$, $M = \{[x, y] \in \mathbb{R}^2 : (x - 1)^2 + (y - 2)^2 = 1\}$
   (c) $f(x, y) = x^2 + y^2$, $M = \{[x, y] \in \mathbb{R}^2 : 2x + 6y = 20\}$
   (d) $f(x, y) = x^2 + y^2$, $M = \{[x, y] \in \mathbb{R}^2 : 5x^2 - 6xy + 5y^2 - 4 = 0\}$

2. Najděte extrémy funkcí na množině - bez Lagrangeových multiplikátorů
   (a) $f(x,y) = x^3 - 2x^2y + 3y^3$ na $M = [-1;1]^2$
   (b) $f(x,y) = x^2 - 3y^2 + xy$ na $M = \{[x,y] \in \mathbb{R}^2 : |x| \leq 1, |y| \leq 1\}$
   (c) $f(x,y) = x^2 - 3y^2 - x + 18y + 4$ na $M = \{[x,y] \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq y \leq 4\}$
   (d) $f(x,y) = (x-y)^2 + x^2$ na M,
   kde M je čtverec s vrcholy $A = [2,0]$, $B = [0,2]$, $C = [-2,0]$, $D = [0,-2]$

Zkouškové příklady

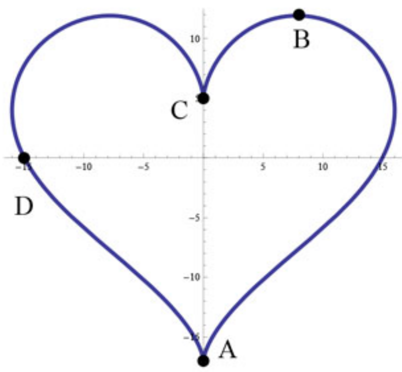
3. Najděte globální extrémy funkcí na množině M
   (a) $f(x,y) = x^4y$, $M = \{[x,y] \in \mathbb{R}^2 : x^4 + y^4 \leq 16, x \geq -1\}$
   (b) $f(x,y) = 2x + 4y$, $M = \{[x,y] \in \mathbb{R}^2 : \sqrt[4]{x} + \sqrt[4]{y} \leq 1, x \geq 0, y \geq 0\}$
   (c) $f(x,y) = (x^2 + 7y^2)e^{-(2x^2+y^2)}$, $M = \{[x,y] \in \mathbb{R}^2 : x^2 + 4y^2 \leq 1\}$
4. Určete maximální možný objem kvádru, jehož hrany jsou rovnoběžné se souřadnými osami, jeden jeho vrchol leží v počátku a diagonálně protilehlý vrchol leží v množině $M = \{[x,y,z], x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0, 4x + 2y + z = 2.\}$

Bonusové příklady

5. Farmář a fařmářka mají 100 m pletiva a rádi by oplotili pozemek pro ovce tak, aby měl co největší plochu. Trvají na tom, že pozemek bude mít tvar obdélníku. Ježto je u řeky, stačí jej oplotit ze 3 stran. Jaké bude zadání za pomoci Lagrangeových multiplikátorů?
   (a) $f(x,y) = xy$, $g(x,y) = 2x + y - 100$
   (b) $f(x,y) = 2x + 2y - 100$, $g(x,y) = xy$
   (c) $f(x,y) = xy$, $g(x,y) = x + y - 100$
   (d) $f(x,y) = x + y$, $g(x,y) = xy - 100$

https://www.cbr.com/shaun-the-sheep-best-worst-episodes-imdb/

6. Ve kterém z bodů A, B, C, D se nachází minimum funkce $f(x,y) = y$ vzhledem ke křivce na obrázku?



Zdroj: https://www.cpp.edu/concepttests/question-library/mat214.shtml