2. cvičení – Lokální extrémy

https://www2.karlin.mff.cuni.cz/~kuncova/vyuka.php, kuncova@karlin.mff.cuni.cz

Příklady

1. Najděte lokální extrémy funkcí

   (a) $f(x,y) = x^2 + (y-1)^2$

   Řešení:

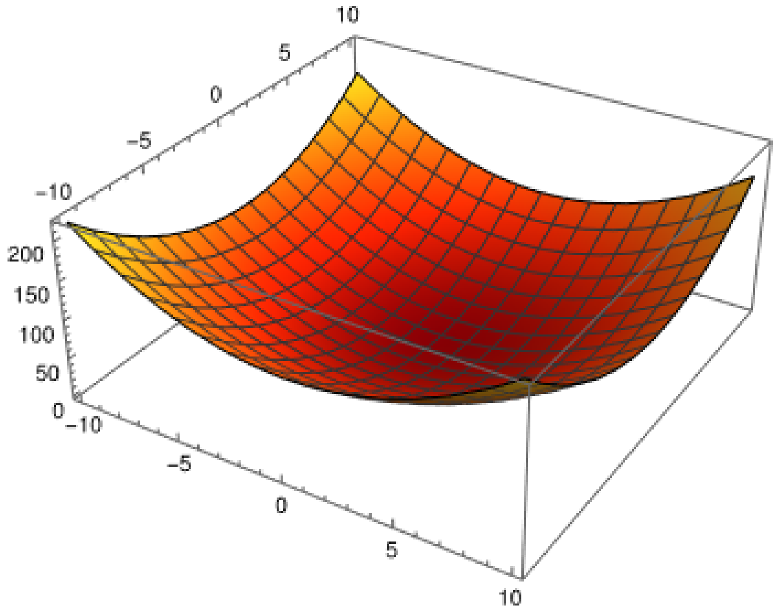
   Podotkněme, že je evidentní, že funkce f je nezáporná a nuly nabývá pouze v bodě $(0,1)$, kde tedy nabývá globálního minima. Pojďme nicméně vyšetřit existenci extrémů standardním postupem. Funkce f je definována na $\mathbb{R}^2$. Parciální derivace

   $$\frac{\partial f}{\partial x} = 2x, \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = 2(y-1)$$

   jsou spojité, tudíž f má v každém bodě totální diferenciál. Jediné body podezřelé z lokálních extrémů jsou tedy stacionární body, tj. body, kde jsou obě parciální derivace nulové. V jiných bodech funkce f nemůže mít extrém. Řešením rovnic

   $$2x = 0, \qquad 2(y-1) = 0$$

   vidíme, že jediným stacionárním bodem je bod $(0,1)$, kde, jak už jsme zmínili funkce zřejmě nabývá globálního minima. Nemusíme tedy vyšetřovat definitnost matice druhého diferenciálu (navíc bychom tak dostali pouze informaci, že jde o lokální minimum).



   (b) $f(x,y) = x^2 - (y-1)^2$

   Řešení:

   Funkce f je definována na $\mathbb{R}^2$. Parciální derivace

   $$\frac{\partial f}{\partial x} = 2x, \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = -2(y-1)$$

jsou spojité, tudíž f má v každém bodě totální diferenciál. Jediné body podezřelé z lokálních extrémů jsou tedy stacionární body, tj. body, kde jsou obě parciální derivace nulové. V jiných bodech funkce f nemůže mít extrém. Řešením rovnic

$$2x = 0, \qquad -2(y-1) = 0$$

vidíme, že jediným stacionárním bodem je bod $(0,1)$. Oproti předchozí úloze není automaticky vidět, zda se v tomto bodě nabývá extrému. Vyšetříme tedy definitnost matice druhého diferenciálu, tj. matici

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \end{pmatrix}$$

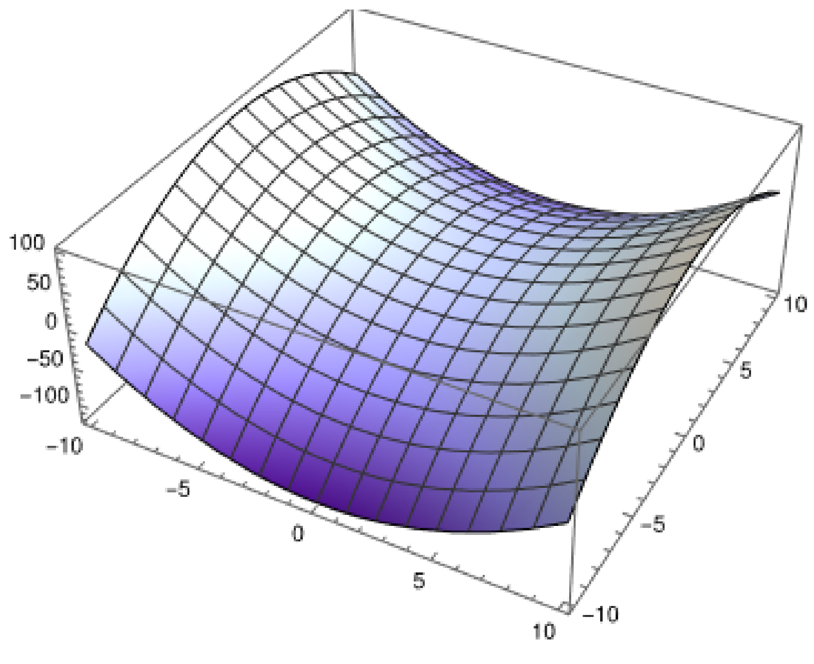
Určeme tedy nejprve druhé parciální derivace. Máme

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 2, \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = -2, \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 0.$$

Matice druhého diferenciálu (v bodě $(0,1)$) má tedy tvar

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$$

a její hlavní determinanty jsou $D_1 = 2 > 0$, $D_2 = -4 < 0$. Protože druhý hlavní determinant (tedy determinant celé matice) je záporný, je matice druhého diferenciálu indefitní, extrému se tedy v bodě $(0,1)$ nenabývá. Funkce f tedy v žádném bodě nemá lokální extrém.



(c) $f(x,y) = x^3 + y^3 - 3xy$

Řešení:

Funkce f je definována na $\mathbb{R}^2$. Spočtěme její parciální derivace. Máme

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 3x^2 - 3y, \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = 3y^2 - 3x.$$

Stacionární body jsou ty, ve kterých jsou obě parciální derivace nulové. Najdeme je řešením soustavy

$$\begin{aligned} 3x^2 - 3y &= 0 \\ 3y^2 - 3x &= 0. \end{aligned}$$

Krácením trojek, vyjádřením $y = x^2$ z první rovnice a dosazením do druhé dostaneme rovnici

$$x^4 - x = 0,$$

která má vzhledem k rozkladu $x^4 - x = x(x^3 - 1) = x(x-1)(x^2 + x + 1)$ dvě řešení, $x_1 = 0$ a $x_2 = 1$. Těmto dvěma řešením přísluší řešení $y_1 = 0$ a $y_2 = 1$.

Druhé parciální derivace jsou

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 6x, \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 6y, \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = -3.$$

Matice druhého diferenciálu v prvním stacionárním bodě $(1, 1)$ je tedy

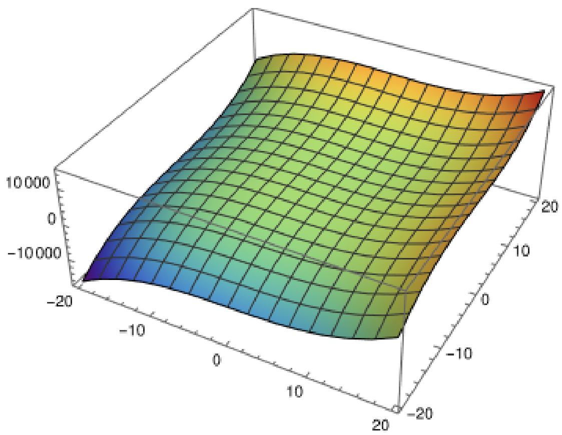
$$\begin{pmatrix} 6 & -3 \\ -3 & 6 \end{pmatrix}$$

hlavní subdeterminanty jsou $D_1 = 6 > 0$, $D_2 = 36 - 9 = 27 > 0$, matice je tedy pozitivně definitní a v bodě $(1, 1)$ má tedy funkce f lokální minimum $f(1, 1) = -1$.

Matice druhého diferenciálu ve druhém stacionárním bodě $(0, 0)$ je ovšem

$$\begin{pmatrix} 0 & -3 \\ -3 & 0 \end{pmatrix}$$

je tedy indefinitní, funkce f v bodě $(0, 0)$ tedy nenabývá extrému.



(d) $f(x,y) = e^{-x^2-y^2}(2y^2+x^2)$

Řešení: Příklad máme odsud: http://homel.vsb.cz/~kre40/esfmat2/fcevicceprom.html

Funkce je $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^2)$. Spočteme první parciální derivace

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial x} &= -2xe^{-x^2-y^2}(x^2+2y^2-1)\\ \frac{\partial f}{\partial y} &= -2ye^{-x^2-y^2}(x^2+2y^2-2)\end{aligned}$$

a položíme je rovny 0. Řešíme tedy tuto soustavu:

$$\begin{aligned}-2xe^{-x^2-y^2}(x^2+2y^2-1) &= 0\\ -2ye^{-x^2-y^2}(x^2+2y^2-2) &= 0\end{aligned}$$

Protože $e^{-(x^2+y^2)} > 0$, dostáváme

$$\begin{aligned}-2x(x^2+2y^2-1) &= 0\\ -2y(x^2+2y^2-2) &= 0\end{aligned}$$

Z 1. rovnice plyne, že buď $x = 0$ nebo $x^2+2y^2-1 = 0$.

- $x = 0$ Dosadíme do druhé rovnice:

  $$-2y2(y^2-1) = 0$$

  tedy máme podezřelé body $(0,0)$, $(0,1)$, $(0,-1)$.
- $x^2+2y^2-1 = 0$ Dosadíme do druhé rovnice:

  $$-2y(-1) = 0$$

  tedy $y = 0$. Dosadíme zpět do podmínky:

  $$x^2-1 = 0.$$

  Tedy máme podezřelé body $(1,0)$, $(-1,0)$.

Celkem máme 5 podezřelých bodů: $(0,0)$, $(0,1)$, $(0,-1)$, $(1,0)$, $(-1,0)$.

Pro určení extrémů spočteme 2. derivace

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} &= e^{-x^2-y^2}(4x^4+2x^2(4y^2-5)-4y^2+2)\\ \frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x} = \frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y} &= 2xe^{-x^2-y^2}(x^2(2y^2-1)+4y^4-8y^2+1)\\ \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} &= e^{-x^2-y^2}(x^2(4y^2-2)+8y^4-20y^2+4)\end{aligned}$$

Sestavíme Hessovu matici a dosadíme do ní podezřelé body. Dle Sylvesterova kritéria určíme definitnost matice a případné lok. extrémy.

- $(0,0)$

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$$

  Lok. minimum.
- $(0,1)$

$$\begin{pmatrix} -2/e & 0 \\ 0 & -8/e \end{pmatrix}$$

  Lok. maximum.
- $(0,-1)$

$$\begin{pmatrix} -2/e & 0 \\ 0 & -8/e \end{pmatrix}$$

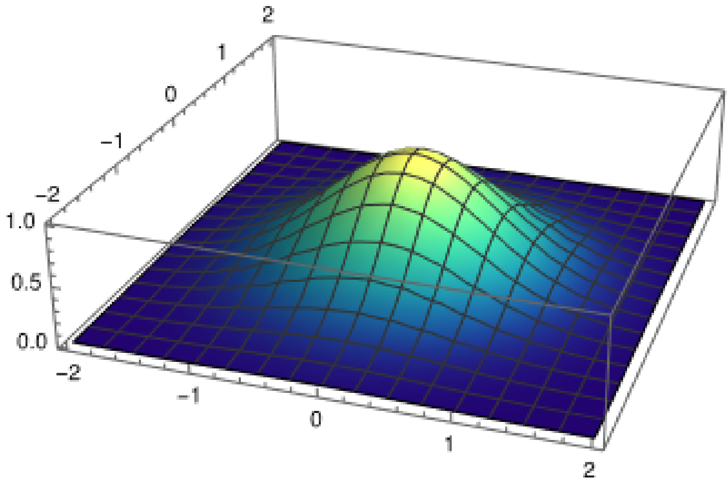
  Lok. maximum.
- $(1,0)$

$$\begin{pmatrix} -4/e & 0 \\ 0 & 2/e \end{pmatrix}$$

  Není extrém.
- $(-1,0)$

$$\begin{pmatrix} -4/e & 0 \\ 0 & 2/e \end{pmatrix}$$

  Není extrém.



(e) $f(x,y) = xy + \frac{50}{x} + \frac{20}{y}$, $x, y > 0$

Řešení:

Funkce f je dle zadání definována na prvním kvadrantu. Spočtěme její parciální derivace. Máme

$$\frac{\partial f}{\partial x} = y - \frac{50}{x^2}, \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = x - \frac{20}{y^2}.$$

Stacionární body jsou ty, ve kterých jsou obě parciální derivace nulové. Najdeme je řešením soustavy

$$\begin{aligned} y - \frac{50}{x^2} &= 0 \\ x - \frac{20}{y^2} &= 0. \end{aligned}$$

Z první rovnice máme, že $y = \frac{50}{x^2}$, dosazením do druhé a přenásobením jmenovatelem získáme rovnici

$$x - \frac{20}{50^2} x^4 = 0.$$

Její řešení jsou $x_1 = 0$ a $x_2 = \sqrt[3]{\frac{50^2}{20}} = \sqrt[3]{125} = 5$. První řešení ovšem nemůže být částí řešení celé soustavy. Odpovídající hodnotou pro druhý kořen je $y_2 = \frac{50}{25} = 2$. Funkce f má tedy (v prvním kvadrantu) jediný stacionární bod $(5, 2)$.

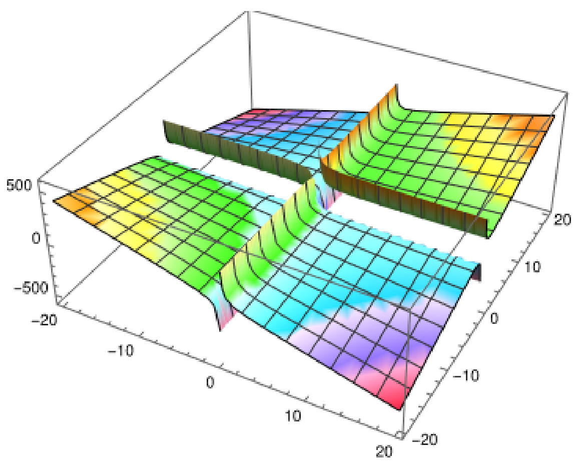
Druhé parciální derivace jsou

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{100}{x^3}, \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{40}{y^3}, \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 1.$$

Matice druhého diferenciálu v bodě $(5, 2)$ je tedy

$$\begin{pmatrix} \frac{4}{5} & 1 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}$$

hlavní subdeterminanty jsou $D_1 = \frac{4}{5} > 0$ a $D_2 = 4 - 1 = 3 > 0$, matice je tedy pozitivně definitní a funkce f má tudíž v bodě $(5, 2)$ (ostré) lokální minimum $f(5, 2) = 30$.



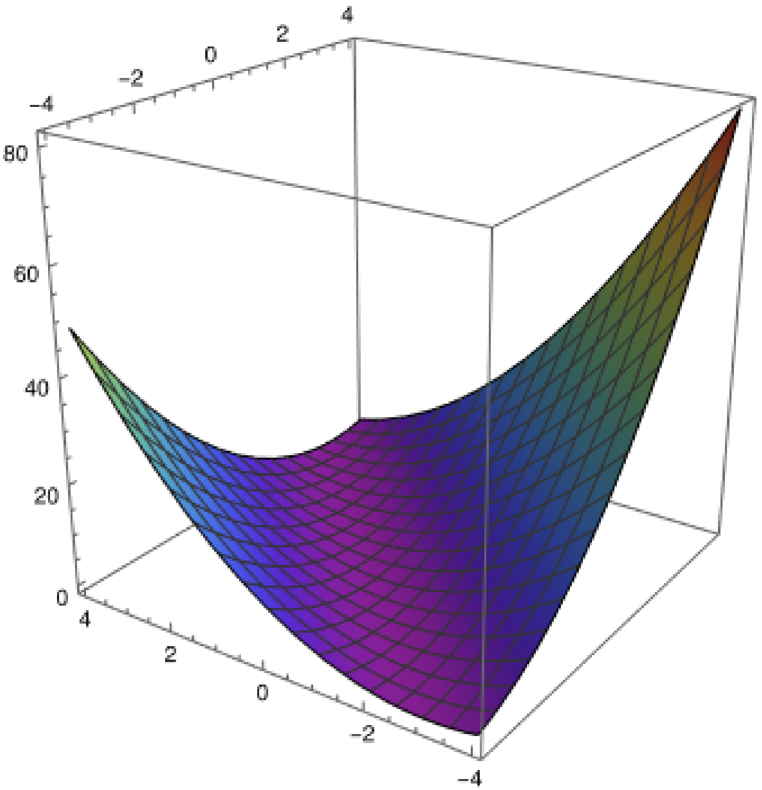
(f) $f(x,y) = (x-y+1)^2$

Řešení:

Je vidět, že funkce f je nezáporná. Ve všech bodech přímky $x-y+1=0$ tedy nabývá globálního minima. Přesvědčíme se, že jiné extrémy funkce f nemá. Parciální derivace jsou

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2(x-y+1), \qquad \frac{\partial f}{\partial x} = -2(x-y+1).$$

Je zjevné, že obě parciální derivace jsou nulové právě v bodech zmíněné přímky. V jiných bodech se tedy extrému nenabývá.



(g) $f(x,y,z) = x^3 + y^3 + z^3 - 3(xy + xz)$

Řešení:

Příklad je z http://projects.math.slu.cz/AM/activ/soubory/opory/VybrPartCv.pdf

Najdeme první parciální derivace

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 3x^2 - 3y - 3z$$
$$\frac{\partial f}{\partial y} = 3y^2 - 3x$$
$$\frac{\partial f}{\partial z} = 3z^2 - 3x$$

Položíme je rovny 0 a najdeme podezřelé body. Výsledek: $(0,0,0)$ a $(\sqrt[3]{4}, \sqrt[3]{2}, \sqrt[3]{2})$.

Spočteme 2. parciální derivace a sestavíme Hessovu matici

$$\begin{pmatrix} 6x & -3 & -3 \\ -3 & 6y & 0 \\ -3 & 0 & 6z \end{pmatrix}$$

V bodě $(0, 0, 0)$ máme

$$\begin{pmatrix} 0 & -3 & -3 \\ -3 & 0 & 0 \\ -3 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Upravíme symetrickými úpravami a zjistíme, že matice je indefinitní - tedy zde není extrém.

V bodě $(\sqrt[3]{4}, \sqrt[3]{2}, \sqrt[3]{2})$ máme

$$\begin{pmatrix} 6\sqrt[3]{4} & -3 & -3 \\ -3 & 6\sqrt[3]{2} & 0 \\ -3 & 0 & 6\sqrt[3]{2} \end{pmatrix}$$

Ze Sylvesterova kritéria plyne, že matice je pozitivně definitní a tedy zde je lok. minimum.

2. Najděte lokální extrémy funkcí

   (a) $f(x, y) = 2y^2 - 4xy + x^4 + 3$

   Řešení: První derivace:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = -4y + 4x^3$$
$$\frac{\partial f}{\partial y} = 4y - 4x$$

   Rovnice položíme rovny 0 a najdeme podezřelé body. Vyjde $(0, 0)$, $(1, 1)$, $(-1, -1)$. Druhé derivace

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 12x^2$$
$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = -4$$
$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 4$$

   Dosadíme body do Hessovy matice V $(0, 0)$:

$$\begin{pmatrix} 0 & -4 \\ -4 & 4 \end{pmatrix}$$

   není extrém.

V $(1,1)$:

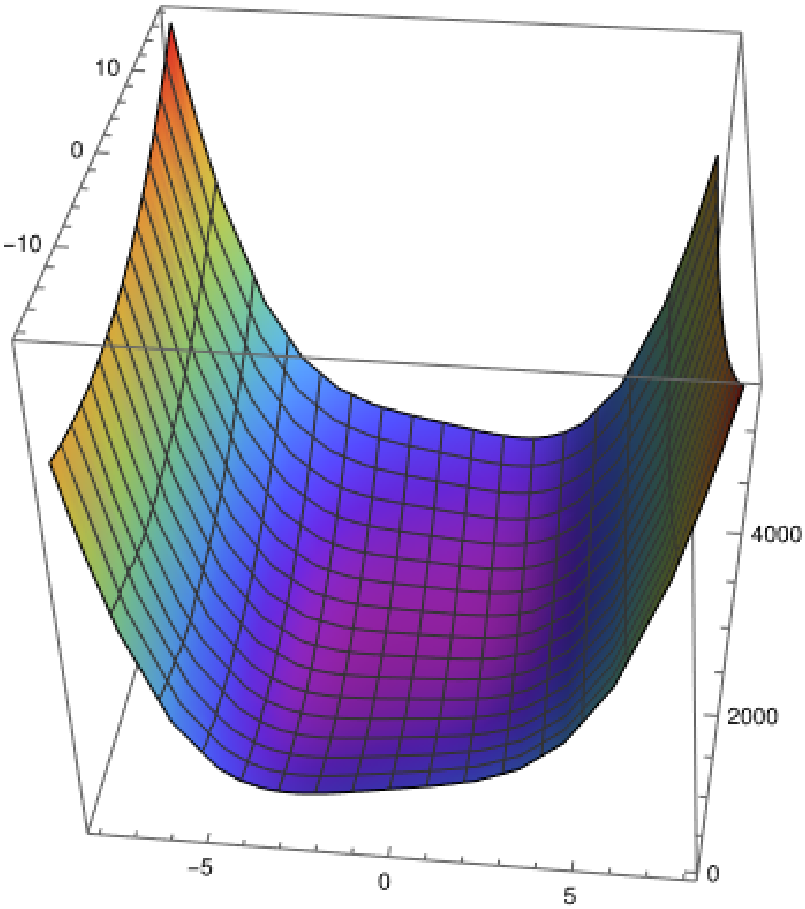
$$\begin{pmatrix} 12 & -4 \\ -4 & 4 \end{pmatrix}$$

lok. minimum.

V $(-1,-1)$:

$$\begin{pmatrix} 12 & -4 \\ -4 & 4 \end{pmatrix}$$

lok. minimum.



(b) $f(x,y) = 2x^3 + 9xy^2 + 15x^2 + 27y^2$

Řešení: První derivace:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 6x^2 + 9y^2 + 30x$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 18xy + 54y$$

Rovnice položíme rovny 0 a najdeme podezřelé body. Vyjde $(0,0)$, $(-5,0)$, $(-3,2)$, $(-3,-2)$.

Druhé derivace

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 12x + 30$$
$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 18y$$
$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 15x + 54$$

Dosadíme body do Hessovy matice.

V bodě $(0,0)$ máme

$$\begin{pmatrix} 30 & 0 \\ 0 & 54 \end{pmatrix}$$

lok. minimum.

V bodě $(-5,0)$ máme

$$\begin{pmatrix} -30 & 0 \\ 0 & -36 \end{pmatrix}$$

lok. maximum.

V bodě $(-3,2)$ máme

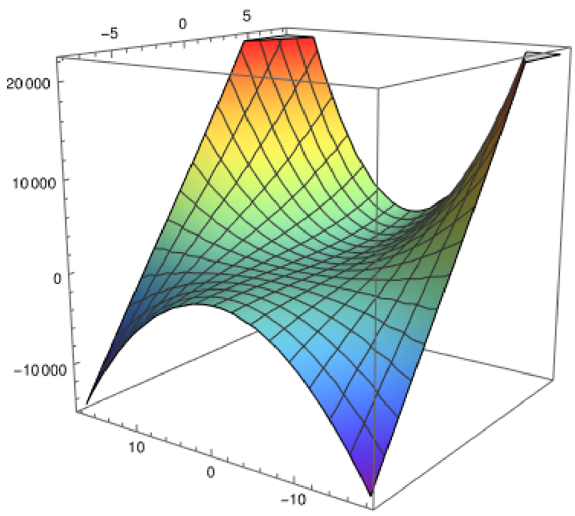
$$\begin{pmatrix} -6 & 36 \\ 36 & 0 \end{pmatrix}$$

není extrém.

V bodě $(-3,-2)$ máme

$$\begin{pmatrix} -6 & -36 \\ -36 & 0 \end{pmatrix}$$

není extrém.



(c) $f(x,y,z) = x^3 + y^2 + z^2 + 12xy + 2z$

Řešení: Příklad máme z http://www.math.muni.cz/~zemanekp/files/SRPzMAII_FRMU.pdf

První derivace:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 3x^2 + 12y$$
$$\frac{\partial f}{\partial y} = 2y + 12x$$
$$\frac{\partial f}{\partial z} = 2z + 2$$

Rovnice položíme rovny 0 a najdeme podezřelé body. Vyjde $(0,0,-1)$, $(24,-144,-1)$.

Druhé derivace

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 6x$$
$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 12$$
$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 2$$
$$\frac{\partial^2 f}{\partial z^2} = 2$$
$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z} = \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial x} = 0$$
$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z} = \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial y} = 0$$

Dosadíme body do Hessovy matice. V bodě $(0,0,-1)$ máme

$$\begin{pmatrix} 0 & 12 & 0 \\ 12 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Není extrém.

V bodě $(24, 144, -1)$ máme

$$\begin{pmatrix} 144 & 12 & 0 \\ 12 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

lok. minimum.

(d) $f(x,y,z) = x^3 + y^2 + \frac{z^2}{2} - 3xz - 2y + 2z$

Řešení: První derivace:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 3x^2 - 3z$$
$$\frac{\partial f}{\partial y} = 2y - 2$$
$$\frac{\partial f}{\partial z} = z - 3x + 2$$

Rovnice položíme rovny 0 a najdeme podezřelé body. Vyjde $(1,1,1)$, $(2,1,4)$.
Druhé derivace

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 6x$$
$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 2$$
$$\frac{\partial^2 f}{\partial z^2} = 1$$
$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 0$$
$$\frac{\partial^2 f}{\partial z \partial x} = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z} = -3$$
$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z} = \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial y} = 0$$

Dosadíme body do Hessovy matice. V bodě $(1,1,1)$ je

$$\begin{pmatrix} 6 & 0 & -3 \\ 0 & 2 & 0 \\ -3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

není extrém.
V bodě $(2,1,4)$ je

$$\begin{pmatrix} 12 & 0 & -3 \\ 0 & 2 & 0 \\ -3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

lok. minimum.

3. Určete, zda jsou následující množiny otevřené nebo uzavřené a pečlivě zdůvodněte:
   (a) $\{[x,y] \in \mathbb{R}^2 : x^2 - y^3 \leq 2\}$
   Řešení: Definujme funkci $f(x,y) = x^2 - y^3$. Funkce je spojitá (násobení a rozdíl spojitých). Dále uvažujme interval $(-\infty, 2]$, který je uzavřený. Množina pak je rovna $f^{-1}((-\infty,2])$, tedy vzoru uzavřeného intervalu při spojitém zobrazení. Tedy je uzavřená.
   (b) $\{[x,y] \in \mathbb{R}^2 : \arctan(x^2+y^2) > 5\}$
   Řešení: $f(x,y) = \arctan(x^2+y^2)$, interval $I = (5,\infty)$ je otevřená množina. Tedy $f^{-1}(I)$ je otevřená.
   (c) $\{[x,y] \in \mathbb{R}^2 : -3 < e^{|x^2-y^2|} < 2\}$
   Řešení: $f(x,y) = e^{|x^2-y^2|}$, interval $I = (-3,2)$ je otevřená množina. Tedy $f^{-1}(I)$ je otevřená.
   (d) $\{[x,y] \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq 1, -3 \leq y \leq 3, x+y \leq 5\}$
   Řešení: $f(x,y) = x+y$, interval $I = (-\infty, 5]$ je uzavřená množina. Tedy $f^{-1}(I)$ je uzavřená.
   Dále $g(x,y) = x$, interval $J = [0,1]$ je uzavřená množina. Tedy $g^{-1}(J)$ je uzavřená.

Dále $h(x,y) = y$, interval $K = [-3,3]$ je uzavřená množina. Tedy $h^{-1}(K)$ je uzavřená.

Dohromady: průnik 3 uzavřených je uzavřená.

4. Určete, zda jsou následující množiny omezené:
   (a) $\{[x,y] \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 < 3\}$
   Řešení: Ano, přímo z definice se vejde do koule $B(0, \sqrt{3})$.
   (b) $\{[x,y] \in \mathbb{R}^2 : \dfrac{1}{x^2} + \dfrac{1}{y} < 10\}$
   Řešení: Ne. Uvažujme např. množinu: $y = 1$ a $x > 1$.
   (c) $\{[x,y] \in \mathbb{R}^2 : x^2 + 2y^2 \leq 1\}$
   Řešení: Ano, neb $x^2 + y^2 \leq x^2 + 2y^2 \leq 1$.
   (d) $\{[x,y] \in \mathbb{R}^2 : \sin(xy) \leq 1\}$
   Řešení: Ne, nerovnost je splněna pro celou rovinu.
   (e) $\{[x,y] \in \mathbb{R}^2 : x^6 + y^6 < 2\}$
   Řešení: Ano, platí $|x| < 2$ a $|y| < 2$, což je čtverec, který je jistě omezená množina.
   (f) $\{[x,y] \in \mathbb{R}^2 : \dfrac{xy}{x^2 + y^2} < \dfrac{1}{2}\}$
   Řešení: Ne. Máme $2xy < x^2 + y^2$ tedy $0 < x^2 - 2xy + y^2$, což je $0 < (x-y)^2$. Tedy nerovnici splňuje celá rovina krom počátku, což není omezená množina.

Bonus

5. Ukažte, že funkce $f(x,y) = (x - y^2)(2x - y^2)$ má v $[0,0]$ lok. minimum vzhledem ke všem přímkám, ale nemá tam minimum.
   Hint: Zkoumejte hodnoty na křivce $[\frac{3}{4}y^2, y]$.
   Řešení: Hodnoty na přímkách: zkoumáme funkci tvaru
   $$g(x) = f(x, kx) = (x - k^2x^2)(2x - k^2x^2) = 2x^2 + k^4x^4 - 3xk^2x^3.$$
   Jde vlastně o funkci jedné proměnné, tedy
   $$\begin{aligned} g'(x) &= 4x + 4k^4x^3 - 9k^2x^2, \qquad & g'(0) &= 0 \\ g''(x) &= 4 + 12k^4x^2 - 18k^2x, \qquad & g''(0) &= 4 \end{aligned}$$
   Tedy jde o lok. minimum.
   Speciální případ: přímka $x = 0$, pak $f(0,y) = y^4$, zjevně jde o lok. minimum.
   Ale na křivce $(\frac{3}{4}y^2, y)$ dostaneme
   $$f(\frac{3}{4}y^2, y) = -\frac{1}{8}y^4,$$
   tedy zřejmě jde o lok. maximum.
6. Najděte Hessovu matici v následujících funkcí $[0,0]$ a diskutujte existenci maxima/minima/sedla vzhledem k semidefinitnosti matice.

(a) $x^4 + y^4$
Řešení: Hessova matice je tvaru

$$\begin{pmatrix} 12x^2 & 0 \\ 0 & 12y^2 \end{pmatrix}$$

tedy v $(0, 0)$ je

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

V bodě je lok. minimum (tvar „mistička“).

(b) $-x^4 - y^4$ **Řešení:** Hessova matice je tvaru

$$\begin{pmatrix} -12x^2 & 0 \\ 0 & -12y^2 \end{pmatrix}$$

tedy v $(0, 0)$ je

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

V bodě je lok. maximum (tvar „kopeček“).

(c) $x^4 - y^4$ **Řešení:** Hessova matice je tvaru

$$\begin{pmatrix} 12x^2 & 0 \\ 0 & -12y^2 \end{pmatrix}$$

tedy v $(0, 0)$ je

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

V bodě není extrém (tvar „sedlo“).

Závěr: Ve všech případech vyšla semidefinitní matice, přitom se tam nalézalo lok. minimum, maximum i sedlo. Ze semidefinitní matice tedy nelze o existenci extrémů nic říct.